Э. КАМКЕ

СПРАВОЧНИК ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Книга Э. Камке является единственным в мировой литературе справочником по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции. В ней дается конспективное изложение важнейших разделов теории и собрано около 500 уравнений с решениями.

Книга предназначена для широкого круга научных работников и инженеров, сталкивающихся в своей практической деятельности с дифференциальными уравнениями. Значение этого справочника особенно велико в связи с тем, что в настоящее время на русском языке нет книги, в которой бы всесторонне и полно освещалась теория вопроса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга посвящена уравнениям в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции.

Указанные уравнения стоят несколько изолированно в общей теории дифференциальных уравнений. Это объясняется, пожалуй, тем, что, как правило, классические проблемы физики и техники приводят к дифференциальным уравнениям (или системам) в частных производных второго (или более высокого) порядка. Это, естественно, определило больший интерес к уравнениям в частных производных порядка выше первого и интенсивное изучение таких уравнений и систем. Что же касается дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, то они встречались главным образом в геометрических задачах. Результаты теории этих уравнений, необходимые геометрии, были в основном получены довольно давно, и интерес к этому разделу математики заметно упал.

Указанное обстоятельство в свою очередь определило то место, которое стали отводить дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции в сложившейся системе математического образования. Поскольку интегрирование каждого такого уравнения в принципе сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то сами эти уравнения стали занимать лишь несколько второстепенных параграфов в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Однако в самое последнее время интерес к дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка вновь сильно возрос. Этому способствовало два обстоятельства. Прежде всего, оказалось, что так называемые обобщенные решения квазилинейных уравнений первого порядка представляют исключительный интерес для приложений (например, в теории ударных волн в газовой динамике и т. д.). Кроме того, далеко вперед шагнула теория систем дифференциальных уравнений в частных производных. Тем не менее до настоящего времени на русском языке не существует монографии, в которой были бы собраны и изложены все факты, накопившиеся в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, если не считать известной книги Н. М. Гюн-

тера, давно уже ставшей библиографической редкостью. Настоящая книга до некоторой степени восполняет этот пробел.

Имя профессора Тюбингенского университета Э. Камке знакомо советским математикам. Ему принадлежит большое число работ по дифференциальным уравнениям и некоторым другим разделам математики, а также несколько книг учебного характера. В частности, его монография «Интеграл Лебега — Стилтьеса» была переведена на русский язык и вышла в 1959 году. Три издания на русском языке в 1951, 1961, 1965 годах выдержал «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям», представляющий собой перевод первого тома «Gewöhnliche Differentialgleichungen» книги Э. Камке «Differentialgleichungen (Lösungsmethoden und Lösungen)».

«Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка» — перевод второго тома той же книги. Здесь собрано около 500 уравнений с решениями. Помимо этого материала, настоящий справочник содержит конспективное (без доказательств) изложение ряда теоретических вопросов, в том числе таких, которые не включаются в обычные курсы дифференциальных уравнений, например теоремы существования, единственности и др.

При подготовке русского издания была переработана имеющаяся в книге обширная библиография. Ссылки на старые и малодоступные иностранные учебники были по возможности заменены ссылками на отечественную и переводную литературу. Были исправлены все замеченные неточности, ошибки и опечатки. Все вставки, замечания и дополнения, внесенные в книгу при редактировании, заключены в квадратные скобки.

Этот справочник, созданный в начале сороковых годов (и с тех пор неоднократно переиздававшийся в ГДР без всяких изменений), несомненно, уже не отражает в полной мере тех достижений, которые имеются сейчас в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Так, в справочнике не нашла никакого отражения теория обобщенных решений квазилинейных уравнений, развитая в известных работах И. М. Гельфанда, О. А. Олейник и др. Можно привести примеры не вошедших в книгу последних результатов, касающихся непосредственно затронутых в справочнике вопросов. Не освещена в справочнике и теория уравнений Пфаффа. Однако, думается, что и в этом ее виде книга окажется несомненно полезным путеводителем по классической теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Приведенная в книге сводка уравнений, решения которых можно записать в конечном виде, очень интересна и полезна, но, конечно, не является исчерпывающей. Она была составлена автором на базе работ, появившихся до начала сороковых годов.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y; $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ — независимые переменные, $r = \{x_1, \ldots, x_n\}$

a, b, c; A, B, C — константы, постоянные коэффициенты,

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}(x, y)$, $\mathfrak{G}(r)$ — открытая область, область на плоскости (x, y), в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ [обычно — область непрерывности коэффициентов и решения. — *Прим. ред.*],

$\mathfrak{g}$ — подобласть $\mathfrak{G}$,

F, f — общая функция,

Ω — произвольная функция,

z; $z(x, y)$; $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, решение,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

ν, μ, k, n — индексы суммирования,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(n-m)!},$$

$\det|z_{k\nu}|$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} z_{11} & \ldots & z_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ z_{n1} & \ldots & z_{nn} \end{pmatrix}$.

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ В БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ УКАЗАНИЯХ

[При ссылках на следующие книги указывается только фамилия автора:

Гюнтер — Н. М. Гюнтер, Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934.

Камке — Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1964.

Курант — Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.

Петровский — И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.

Степанов — В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.

Камке, DGlen — Э. Камке, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1944.

Сокращения наименований периодических изданий соответствуют общепринятым и потому при переводе опущены; см., однако, Камке. — *Прим. ред.*]

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x, y; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ — независимые переменные, $r = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$a, b, c; A, B, C$ — константы, постоянные коэффициенты,

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}(x, y)$, $\mathfrak{G}(r)$ — открытая область, область на плоскости (x, y), в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ [обычно — область непрерывности коэффициентов и решения. — *Прим. ред.*],

$\mathfrak{g}$ — подобласть $\mathfrak{G}$,

F, f — общая функция,

Ω — произвольная функция,

$z; z(x, y); z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, решение,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

ν, μ, k, n — индексы суммирования,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(n-m)!},$$

$\det|z_{k\nu}|$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} z_{11} & \ldots & z_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & \ldots & z_{nn} \end{pmatrix}$.

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ В БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ УКАЗАНИЯХ

[При ссылках на следующие книги указывается только фамилия автора:

Гюнтер — Н. М. Гюнтер, Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934.

Камке — Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1964.

Курант — Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.

Петровский — И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.

Степанов — В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.

Камке, DGlen — Э. Камке, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1944.

Сокращения наименований периодических изданий соответствуют общепринятым и потому при переводе опущены; см., однако, Камке. — *Прим. ред.*]

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

[Вопросам, рассматриваемым в первой части, посвящена следующая литература:

Н. М. Гюнтер, Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934;

В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959;

Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957;

И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964;

Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», 1964;

В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958;

Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1957;

П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА I
ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Введение

1.1. Общие понятия, обозначения и терминология. *Общее (неразрешенное) дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ n независимых переменных имеет вид*

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (1)$$

Здесь F — заданная функция $2n+1$ аргумента. *Решением, интегралом* или *интегральной поверхностью* этого дифференциального уравнения (1) называется любая функция $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_n)$ и обращающая в этой области соотношение (1) в тождество.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, *разрешенное относительно одной из производных* (нормальная, или каноническая форма уравнения), имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \qquad (2)$$

Здесь f — заданная функция $2n+2$ аргументов; независимые переменные обозначены теперь через x, $y_1, \ldots, y_n$, искомой является функция $z = z(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Введем сокращенные обозначения [1]):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) будут выглядеть соответственно следующим образом:

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{1а}$$

и

$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n). \tag{2а}$$

Эти уравнения можно записать еще короче в векторной форме:

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{1б}$$

и соответственно

$$p = f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}); \tag{2б}$$

здесь $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{q}$ означают следующие векторы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \{x_1, \ldots, x_n\}, & \boldsymbol{p} &= \{p_1, \ldots, p_n\}, \\ \boldsymbol{y} &= \{y_1, \ldots, y_n\}, & \boldsymbol{q} &= \{q_1, \ldots, q_n\}. \end{aligned} \tag{3а}$$

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции z и ее производных, и *квазилинейным*, если оно линейно относительно производных (линейность по z здесь не предполагается) [2]). Общий вид квазилинейного уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z)\, p_\nu = g(\boldsymbol{r}, z) \tag{4}$$

и линейного

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})\, p_\nu + f_0(\boldsymbol{r})\, z = f(\boldsymbol{r}); \tag{5}$$

здесь использованы сокращения (3) и (3а). Если в последнем случае также еще $f_0 = f = 0$, то дифференциальное уравнение называется *однородным*.

1.2. Замечания о решениях. Каждое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка находится в тесной

---

[1]) [Иногда их называют *обозначениями Монжа*. — *Прим. ред.*]

[2]) [В некоторых книгах можно встретить и иную терминологию. — *Прим. ред.*]

связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений — системой так называемых *характеристических уравнений* данного дифференциального уравнения в частных производных. Решение последнего строится из решений этой *характеристической системы*; оно однозначно определено, если задана начальная кривая

$$x_1 = x_1(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t),\ z = z(t), \tag{6}$$

сама не являющаяся характеристикой, и, кроме того, для точек этой кривой заданы значения производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. (Для линейных и квазилинейных уравнений достаточно только начальной кривой (6).) Строгая формулировка этого фундаментального предложения, которая будет дана ниже, содержит еще ряд дополнительных предположений.

Существенное влияние на решения и, в частности, на однозначность решений оказывает вид области, в которой ищется решение (см. п. 2.6 (д)). Поэтому в общей теореме, которая будет сформулирована впоследствии, на область налагаются необходимые ограничения. Они не являются наиболее общими, но будут по возможности просто описывать область (все пространство, параллельная полоса или прямоугольный параллелепипед). При специальных методах решения отказываются от задания области, так как при применении их на конкретных примерах получают область гораздо более точную, нежели на основании общих рассмотрений.

§ 2. Линейное однородное уравнение с двумя независимыми переменными: $f(x, y)\,p + g(x, y)\,q = 0$ [1]

2.1. Геометрическая интерпретация. Простейший тип дифференциального уравнения в частных производных первого порядка — *линейное однородное дифференциальное уравнение для одной неизвестной функции* $z = z(x, y)$ *двух независимых переменных*:

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

или

$$f(x, y)\,p + g(x, y)\,q = 0. \tag{1a}$$

Здесь для сокращения положено

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

---

[1]) Изложение следует книге Камке, DGlen, стр. 296—321. [См. также литературу, указанную перед § 1. — *Прим. ред.*]

Дифференциальное уравнение всегда будет рассматриваться в некоторой области $\mathfrak{G}(x, y)$, в которой коэффициенты $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены и непрерывны[1]).

Пятерку чисел x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 мы будем называть *плоскостным элементом* (*элементом прикосновения*), связывая с этими числами плоскость

$$z - z_0 = (x - x_0) p_0 + (y - y_0) q_0$$

в трехмерном пространстве переменных x, y, z. Точка (x_0, y_0, z_0), через которую проходит эта плоскость, называется *точкой-носителем*, числа p_0, q_0 называются *направляющими коэффициентами* плоскостного элемента. Плоскостные элементы с общей точкой-носителем (x_0, y_0, z_0) образуют, очевидно, семейство плоскостей, проходящих через одну точку (x_0, y_0, z_0) (разумеется, исключая плоскость, перпендикулярную к координатной плоскости XOY). Если $z = \psi(x, y)$—непрерывно дифференцируемая поверхность, то плоскостной элемент

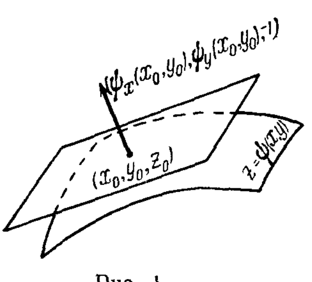


Рис. 1.

$$x, \ y, \ \psi(x, y), \ \psi_x(x, y), \ \psi_y(x, y)$$

определяет (для допустимых значений x и y) касательную плоскость к этой поверхности[2]) (рис. 1).

В силу дифференциального уравнения (1) или (1a) с каждой точкой (x_0, y_0, z_0) можно связать плоскостные элементы x_0, y_0, z_0, p, q, направляющие коэффициенты p, q которых удовлетворяют уравнению

$$f(x_0, y_0) p + g(x_0, y_0) q = 0.$$

Получаем[3]) пучок плоскостей (кроме плоскости, ортогональной к плоскости XOY), которые проходят через горизонтальную прямую

$$x - x_0 = f(x_0, y_0) t, \quad y - y_0 = g(x_0, y_0) t, \quad z = z_0$$

---

[1]) От вида этой области может существенно зависеть решение рассматриваемого дифференциального уравнения; см. пп. 2.6 (г) и 2.6 (д). К указанным здесь предположениям часто присоединяют еще другие, дополнительные. Для разрешимости дифференциального уравнения (1) одного указанного в тексте предположения о коэффициентах, вообще говоря, недостаточно; см. O. Perron, Math. Zeitschrift 27 (1928), стр. 549.

[2]) [Напомним, что если поверхность задана уравнением $z = \psi(x, y)$, то уравнение касательной плоскости к этой поверхности в некоторой точке $(x_0, y_0, z_0 = \psi(x_0, y_0))$ имеет вид

$$\psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \psi_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

т. е. вектор $(\psi_x(x_0, y_0), \psi_y(x_0, y_0), -1)$ является нормалью к данной поверхности в рассматриваемой точке. — *Прим. ред.*]

[3]) В предположении, что $|f(x_0, y_0)| + |g(x_0, y_0)| > 0$, т. е. что рассматривается регулярная точка (см. п. 2.8 (д)).

(t — параметр) (рис. 2). Таким образом, в силу дифференциального уравнения (1), каждой точке отвечает пучок плоскостей[1]). Интеграл уравнения (1) с геометрической точки зрения есть любая непрерывно дифференцируемая поверхность $z=\psi(x, y)$, которая в каждой своей точке (x_0, y_0, z_0) имеет одну из плоскостей соответствующего пучка своей касательной плоскостью.

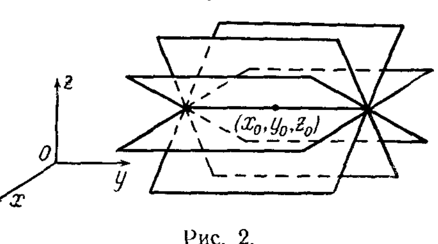


Рис. 2.

2.2. Замечания об интегралах и линиях уровня.

(а) Каждое дифференциальное уравнение (1) имеет, очевидно, тривиальное решение $z=\text{const}$. В дальнейшем нас будут интересовать лишь нетривиальные решения.

(б) Если $z=\psi(x, y)$ — интеграл уравнения (1) в $\mathfrak{G}$ и если $A<\psi(x, y)<B$[2]), то для каждой непрерывно дифференцируемой на интервале $A<u<B$ функции $\Omega(u)$ сложная функция $\chi(x, y)=\Omega(\psi(x, y))$ тоже является интегралом уравнения (1).

Аналогичным образом получаем: если $\psi_1(x, y), \ldots, \psi_m(x, y)$ — интегралы уравнения (1) в $\mathfrak{G}$ и $\Omega(u_1, \ldots, u_m)$ — некоторая произвольная функция, определенная для значений ψ_ν, $\nu=1, \ldots, m$, и имеющая непрерывные частные производные первого порядка, то сложная функция

$$\chi(x, y)=\Omega(\psi_1(x, y), \ldots, \psi_m(x, y))$$

также является интегралом уравнения (1). В частности, функции, полученные умножением интегралов уравнения (1) на постоянные, а также линейные комбинации[3]) интегралов являются снова интегралами рассматриваемого уравнения.

(в) Особенность дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка состоит в том, что их решения вполне определяются интегральными кривыми некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для дифференциального уравнения (1) к этому результату можно прийти следующим путем.

Любое решение $z=\psi(x, y)$ изображается поверхностью в (x, y, z)-пространстве, лежащей над плоскостью XOY. Точки этой поверх-

---

[1]) [Эти пучки и их оси называются соответственно *пучками Монжа* и *осями Монжа*; точка пространства вместе с направлением оси Монжа, проходящей через эту точку, называется *характеристическим линейным элементом*. — *Прим. ред.*]

[2]) Случай, когда $A=-\infty$, $B=+\infty$, не исключается.

[3]) Линейной комбинацией функций $\psi_1, \ldots, \psi_m$ называется выражение вида $A_1\psi_1+\ldots+A_m\psi_m$ с произвольными постоянными $A_1, \ldots, A_m$.

ности, лежащие на одной и той же высоте c над плоскостью XOY, т. е. соответствующие фиксированному значению c функции $\psi(x, y)$, образуют некоторую кривую, называемую *линией уровня* (рис. 3). Уравнение линии уровня имеет вид

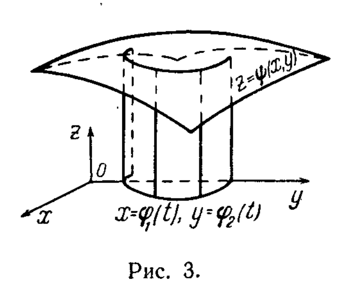


Рис. 3.

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t), \quad z=c,$$
$$t \text{ — параметр},$$

где функции φ_1 и φ_2 непрерывно дифференцируемы и таковы, что

$$\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \equiv c.$$

После дифференцирования этого соотношения по t получается:

$$\psi_x(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_1' + \psi_y(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2' = 0.$$

Так как функция ψ удовлетворяет уравнению (1), то имеем:

$$f(\varphi_1, \varphi_2)\psi_x(\varphi_1, \varphi_2) + g(\varphi_1, \varphi_2)\psi_y(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Если $|\psi_x| + |\psi_y| > 0$ всюду, то из этих двух соотношений следует, что

$$\varphi_1' g(\varphi_1, \varphi_2) - \varphi_2' f(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

При условии, что переменная t изменяется нужным образом, ясно, что предыдущее соотношение выполняется, если [1])

$$\varphi_1' = f(\varphi_1, \varphi_2), \qquad \varphi_2' = g(\varphi_1, \varphi_2).$$

Итак, проекции линий уровня на плоскость XOY заданы этими двумя не зависящими от ψ дифференциальными уравнениями и, следовательно, для всех интегральных поверхностей одинаковы.

На основании сказанного можно теперь предложить следующий способ отыскания интегральных поверхностей: находим интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = f(x, y), \qquad y'(t) = g(x, y)$$

(которые представляют собой проекции линий уровня искомой поверхности) и поднимаем эти кривые на подходящую высоту так, чтобы они образовали некоторую непрерывно дифференцируемую поверхность $z = \psi(x, y)$. Этот принцип является важнейшим при конструировании интегральных поверхностей, и именно таким образом фактически строятся (см. пп. 2.3, 2.4, 2.5) интегральные поверхности дифференциального уравнения (1). Делая необходимые обобщения, мы на этом пути получим также решения некоторых более общих уравнений.

---

[1]) При этом предполагается выполненным условие $|f(x, y)| + |g(x, y)| > 0$, а также, что φ_1' и φ_2' нигде не обращаются в нуль одновременно.

2.3. Характеристики и интегральные поверхности. Идеи п. 2.2 (в) осуществляются следующим образом. В силу предположения п. 2.1 относительно функций f и g, через каждую точку (ξ, η) области $\mathfrak{G}$ проходит по крайней мере одна интегральная кривая [1])

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \tag{2}$$

удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$x'(t) = f(x, y), \qquad y'(t) = g(x, y). \tag{3}$$

Каждая такая кривая или соответствующая ей пространственная кривая

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = c, \tag{4}$$

с произвольной константой c называется *характеристической кривой* или просто *характеристикой* [2]) дифференциального уравнения (1). Дифференциальные уравнения (3) называются по отношению к уравнению (1) *характеристическими уравнениями* [3]) или *характеристической системой*.

Справедливы следующие утверждения:

(**а**) Каждый интеграл $z = \psi(x, z)$ уравнения (1) постоянен вдоль каждой характеристической кривой (2), т. е. $\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \text{const}$. Константа меняется в зависимости от выбранной характеристической кривой.

(**б**) Каждая характеристика (4), которая имеет хотя бы одну общую точку с интегральной поверхностью уравнения (1), целиком лежит на этой поверхности. Таким образом, каждая интегральная поверхность построена из характеристик.

(**в**) Если две интегральные поверхности уравнения (1) имеют общую точку, то они имеют общей и всю характеристику, проходящую через эту точку.

(**г**) Функция $\psi(x, y)$ заведомо есть интеграл уравнения (1), если она:

(α) непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{G}$ и

(β) вдоль каждой характеристической кривой (2) постоянна.

Из (а) и (г) следует:

---

[1]) При этом допускаются также «кривые», которые состоят только из одной точки, т. е. для которых функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются одновременно постоянными.

[2]) [В отличие от (4), кривые (2) называют иногда *проекциями характеристических кривых* — см. Курант, стр. 72, 79. Следует отметить, что строго установившаяся терминология здесь отсутствует, и потому в различных книгах можно встретить термины, отличные от используемых здесь, или те же термины, но употребляемые несколько в ином смысле. В соответствии с оригиналом мы будем кривую (2) называть *характеристической кривой*, а кривую (4) — *характеристикой*. — *Прим. ред.*]

[3]) [Автор называет их также *уравнениями Лагранжа*. — *Прим. ред.*]

(д) Интегралы уравнения (1) — непрерывно дифференцируемые функции $z=\psi(x, y)$, которые в своей области определения вдоль каждой характеристической кривой принимают постоянные значения.

2.4. Решение уравнения посредством характеристик. Если известны характеристики, то в ряде случаев предложение п. 2.3 (д) легко приводит к полному обозрению интегральных поверхностей. Покажем это на нескольких примерах:

(а) $$ap+bq=0.$$

Из характеристических уравнений $x'=a$, $y'=b$ следует: $x=at+A$ $y=bt+B$ (A, B — произвольные постоянные). Таким образом характеристические кривые и характеристики образуют семейство параллельных прямых. Поэтому интегральными поверхностями данного уравнения являются всевозможные гладкие цилиндрические поверхности, образующими которых служат эти параллельные прямые (рис. 4).

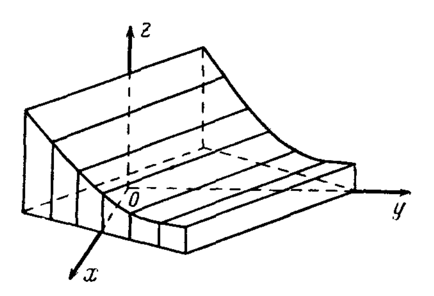


Рис. 4.

(б) $$xp+yq=0.$$

Из характеристических уравнений $x'=x$, $y'=y$ получаем:

$$x=Ae^t, \qquad y=Be^t$$

(A, B — произвольные постоянные). Следовательно, характеристические кривые — это лучи, лежащие в плоскости XOY и выходящие из начала координат. Интегральными поверхностями являются те непрерывно дифференцируемые поверхности, которые могут быть построены параллельным перемещением этих лучей вдоль оси z (рис. 5). Единственными интегральными поверхностями, существующими в области $\mathfrak{G}(x, y)$, содержащей начало координат $x=0$, $y=0$, являются плоскости $z=\text{const}$. В любой области плоскости XOY, не содержащей начала координат, имеются еще и другие интегральные поверхности (*коноиды*, рис. 5).

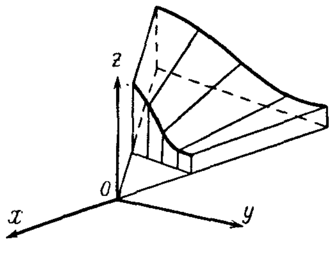


Рис. 5.

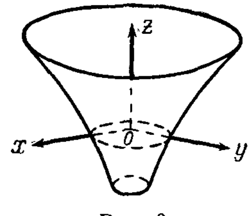


Рис. 6.

(в) $$yp-xq=0.$$

Из характеристических уравнений $x'=y, y'=-x$ находим: $xx'+yy'=0$ или $x^2+y^2=\text{const}$, т. е. все характеристические кривые являются концентрическими окружностями с центром в начале координат. Интегральные

поверхности — те непрерывно дифференцируемые поверхности, которые могут быть построены параллельным перемещением этих окружностей вдоль оси z, т. е. все гладкие поверхности вращения, имеющие ось z в качестве оси вращения и не имеющие ни в одной точке вертикальной касательной плоскости [1]) (рис. 6).

2.5. Решение уравнения посредством комбинирования характеристических уравнений. Этот метод будет изложен на двух примерах.

(а) $$ayp + bxq = 0.$$

Для каждого решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ характеристической системы

$$x' = ay, \qquad y' = bx$$

справедливо соотношение

$$bxx' - ayy' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(bx^2 - ay^2) = 0,$$

показывающее, что функция $\psi(x, y) = bx^2 - ay^2$ постоянна вдоль каждой характеристической кривой. Кроме того, эта функция непрерывно дифференцируема, и значит, в силу п. 2.3 (г), поверхность $z = bx^2 - ay^2$ является интегральной поверхностью [2]).

(б) $$axp + byq = 0.$$

Характеристические уравнения

$$x' = ax, \qquad y' = by$$

---

[1]) Интегральной «кривой» характеристической системы является в этом примере еще само начало координат. Как и в предыдущем примере, рассматриваемое здесь уравнение не имеет нетривиального гладкого решения в области $\mathfrak{G}(x, y)$, содержащей начало координат. Два последних примера показывают, что решение существенно зависит от вида той области, в которой мы ищем решения; см. далее пп. 2.6 (г), 2.6 (д), 2.8 (д). — *Прим. ред.*

[2]) [Точнее, одним из интегралов. Вид полученной интегральной поверхности зависит от знаков коэффициентов a и b. Рис. 7 дает представление

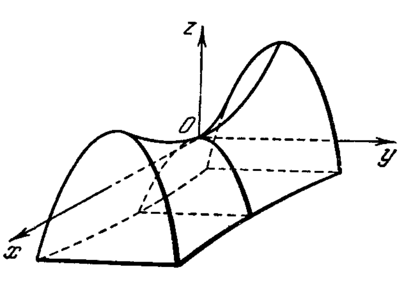


Рис. 7.

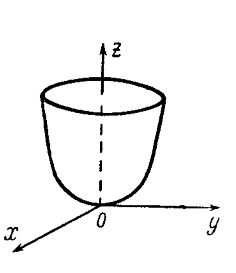


Рис. 8.

об этой поверхности в случае, когда a и b одного знака (гиперболический параболоид), а рис. 8 — в случае, когда a и b разных знаков (эллиптический параболоид). При $a = 1$, $b = -1$ см. п. 2.4 (в). — *Прим. ред.*]

показывают, что для $x \neq 0$, $y \neq 0$, т. е. для каждого из четырех квадрантов плоскости XOY, справедливо соотношение

$$b\frac{x'}{x} - a\frac{y'}{y} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\ln(|x|^b|y|^{-a}) = 0.$$

Таким образом, функция $\psi(x, y) = \ln(|x|^b|y|^{-a})$ вдоль каждой характеристической кривой принимает постоянное значение. Кроме того, эта функция непрерывно дифференцируема, а потому, в силу п. 2.3 (г), она является интегралом. На основании п. 2.2 (б) из этого интеграла можно получить более простой; положив $\Omega(u) = e^u$, находим $\chi(x, y) = |x|^b|y|^{-a}$.

(в) Как показывают приведенные примеры, иногда можно удачно, комбинируя характеристические уравнения, найти интегрируемое выражение, первообразная которого не зависит от параметра t. Этот метод в ряде случаев оказывается полезным, однако он не содержит общего доказательства теоремы существования решения. Кроме того, остается еще открытым вопрос, как из отдельного интеграла получить всю совокупность интегралов; по этому вопросу см. п. 2.8.

(г) Если нужно найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через д а н н у ю пространственную кривую (*задача Коши*), то можно воспользоваться замечанием п. 2.2 (б).

Так, если в примере (а) требуется найти интегральную поверхность, проходящую через параболу $z = 4x^2$, $y = x$, то ищут непрерывно дифференцируемую функцию $\Omega(u)$ такую, чтобы равенство

$$z = \Omega(bx^2 - ay^2)$$

было справедливо при $z = 4x^2$, $y = x$. Подстановка дает:

$$4x^2 = \Omega((b-a)x^2) \quad \text{или}^{1)} \quad \Omega(u) = \frac{4u}{b-a}.$$

Итак, искомый интеграл представляется в виде

$$z = \frac{4}{b-a}(bx^2 - ay^2).$$

Если в примере (б) требуется найти интегральную поверхность, проходящую через ту же параболу, то функцию $\Omega(u)$ выбирают так, чтобы (при $x > 0$, $y > 0$) равенство

$$z = \Omega(x^b y^{-a})$$

было справедливо при $z = 4x^2$, $y = x$. Подстановка этих значений в равенство дает нам $4x^2 = \Omega(u)$, где $u = x^{b-a}$. Отсюда следует

$$\Omega(u) = 4u^{\frac{2}{b-a}},$$

а потому искомый интеграл при $a \neq b$ дается формулой

$$z = 4x^{\frac{2b}{b-a}} y^{\frac{2a}{a-b}}.$$

---

1) [Если $b \neq a$; в противном случае задача неразрешима.— *Прим. ред.*]

2.6. Частный случай: $p+f(x, y)q=0$. Если во всей рассматриваемой области $\mathfrak{G}$ коэффициент $f \neq 0$, то, разделив все члены дифференциального уравнения (1) на f и обозначив g/f через f, мы получим уравнение специального вида

$$p+f(x, y)q=0. \tag{5}$$

Первое из характеристических уравнений (3) в этом случае имеет вид $x'(t)=1$; в качестве его решения можно взять $x=t$. Тогда второе характеристическое уравнение (3) можно записать в форме

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{6}$$

Всюду до конца этого пункта мы будем предполагать, что функция $f(x, y)$ в области $\mathfrak{G}(x, y)$ имеет непрерывную частную производную f_y.

(а) Основная теорема существования. Пусть $\varphi(x, \xi, \eta)$ — характеристическая функция дифференциального уравнения (6), т. е. $y=\varphi(x, \xi, \eta)$ — проходящая через точку (ξ, η) интегральная кривая уравнения (6)[1]. Тогда для всех точек (ξ, η), для которых функция $\varphi(x_0, \xi, \eta)$ при фиксированном x_0 существует, справедливо соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+f(\xi, \eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0,$$

т. е. функция $\psi(x, y)=\varphi(x_0, x, y)$ при фиксированном x_0 является интегралом уравнения (5) в области существования функции $\varphi_0(x_0, x, y)$, и при этом $\psi_y>0$.

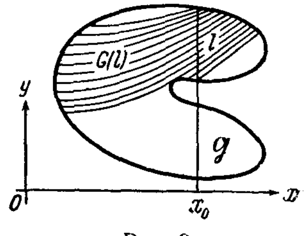


Рис. 9.

Пусть l — некоторый кусок прямой $x=x_0$, лежащий в $\mathfrak{G}$. Обозначим через $G(l)\subset\mathfrak{G}$ область существования функции $\varphi(x_0, x, y)$; очевидно, что область $G(l)$ — это та подобласть $\mathfrak{G}$, которая заметается интегральными кривыми уравнения (6), проходящими через l (рис. 9). Область $G(l)$ будем называть *характеристическим полем* дифференциального уравнения (5).

(б) Задача Коши. Пусть задана кривая[2])

$$x=x_0, \quad y=\eta, \quad z=\omega(\eta) \quad (\alpha<\eta<\beta), \tag{7}$$

проекцией которой на плоскость XOY является отрезок l. Задача Коши (задача с начальными данными) для дифференциального уравнения (5) состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную начальную кривую (7).

---

[1]) [См. Камке, стр. 59. — *Прим. ред.*]

[2]) [Это — плоская кривая, лежащая в плоскости $x=x_0$, параллельной плоскости YOZ. Для такой кривой в оригинале употребляется термин Normalkurve. — *Прим. ред.*]

Если в характеристическом поле $G(l)$ имеет место неравенство $A < \varphi < b$ и если функция $\omega(u)$ непрерывно дифференцируема для $A < u < B$, то требуемая интегральная поверхность существует и притом только одна[1]), а именно:

$$\psi(x, y) = \omega(\varphi(x_0, x, y)).$$

Легко установить аналитически, используя п. 2.2(б), что $\varphi(x_0, x, y)$ является интегралом в области $G(l)$ и что $\varphi(x_0, x_0, y) = y$, а потому $\psi(x_0, y) = \omega(y)$. Можно также строить интегральную поверхность геометрически: провести через начальную кривую (7) характеристики

$$y = \varphi(x, x_0, \eta), \qquad z = \omega(\eta)$$

и исключить η. Для этого достаточно использовать первые два уравнения (7), что сразу приводит к соотношению $z = \omega(\varphi(x_0, x, y))$.

Пример. $p + 2xq = 0$.

Характеристическое уравнение (6) превращается в $y' = 2x$. Таким образом, $\varphi(x, \xi, \eta) = x^2 - \xi^2 + \eta$; следовательно,

$$z = \omega\left(x_0^2 - x^2 + y\right)$$

— искомая интегральная поверхность, проходящая через кривую (7).

Далее, если есть какой-нибудь интеграл $\psi(x, y)$, $\psi_y > 0$ на характеристическом поле $G(l)$, то все интегралы можно получить из формулы $\chi(x, y) = \omega(\psi(x, y))$, где $\omega(u)$ пробегает все непрерывно дифференцируемые функции, определенные для значений ψ.

Если $\mathfrak{G}$ — некоторая полоса[2])

$$a < x < b, \qquad -\infty < y < +\infty$$

и если функции f или f_y ограничены в $\mathfrak{G}$, то $G(l)$ совпадает с $\mathfrak{G}$. В этом случае можно задать значение интеграла на любой прямой $x = x_0$, $a < x_0 < b$, и он тем самым будет однозначно определен и будет существовать во всей области $\mathfrak{G}$.

(в) Обобщенная задача Коши. Кривая (7) специального вида может быть заменена произвольной пространственной кривой

$$x = u(s), \quad y = v(s), \quad z = w(s), \quad s \text{ — параметр;}$$

функции u, v, w непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют

---

[1]) Если рассматривать только такие интегральные поверхности, область определения которых совпадает с характеристическим полем данного уравнения. Если области $\mathfrak{G}$ и $G(l)$ таковы, как на рис. 9, то в некоторых случаях можно продолжать интегральную поверхность также за пределы $G(l)$, но в этой получившейся расширенной области условия (7) уже не будут выделять однозначное решение.

[2]) Случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ допускаются, т. е. в качестве $\mathfrak{G}$ может фигурировать вся плоскость XOY или полуплоскость.

неравенствам [1])

$$|u'| + |v'| > 0, \qquad v' \neq f(u, v)\, u'. \tag{8}$$

Для решения этой задачи следуют описанному в (б) геометрическому методу: в достаточно малой окрестности кривой $x = u(s)$, $y = v(s)$ интеграл может быть записан параметрически соотношениями

$$y = \varphi(x,\ u(s), v(s)), \qquad z = w(s).$$

Пример. Пусть для дифференциального уравнения примера (б) задана начальная кривая

$$x = s, \qquad y = 2s, \qquad z = w(s).$$

Первое из неравенств (8) выполнено для всех s; второе для $s \neq 1$. Так как $\varphi(x, \xi, \eta) = x^2 - \xi^2 + \eta$, то параметрическая запись интеграла выглядит так:

$$y = x^2 - s^2 + 2s, \qquad z = w(s).$$

Из первого уравнения получается

$$s = 1 \pm \sqrt{x^2 - y + 1},$$

причем верхний знак берется для $s > 1$, т. е. для $x > 1$, а нижний — в противоположном случае. Окончательно:

$$z = \omega(1 \pm \sqrt{x^2 - y + 1}) \text{ для } y < x^2 + 1.$$

(г) О существовании нетривиального интеграла в произвольной области. Во всей области $\mathfrak{G}$ дифференциальное уравнение (5) может не иметь нетривиального (см. п. 2.2 (а)) интеграла, даже если функция $f(x, y)$ имеет в этой области производные сколь угодно высокого порядка по x и y, а сама область является односвязной [2]). С другой стороны, имеют место следующие предложения:

Рис. 10.

(г₁) Если область $\mathfrak{G}$ односвязна и ограничена и если функции $f(x, y)$ и $f_y(x, y)$ непрерывны при приближении к границе области $\mathfrak{G}$, то дифференциальное уравнение (5) имеет во всей области $\mathfrak{G}$ интеграл $\psi(x, y)$, причем $\psi_y > 0$ всюду в этой области [3]).

(г₂) Пусть функция $f(x, y)$ в области $\mathfrak{G}$ (на рис. 10 эта область ограничена сплошной линией) ограничена. Пусть a — нижняя, b — верхняя грани (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ допускаются) абсцисс x точек $(x, y) \in \mathfrak{G}$. Тогда в каждой подобласти $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$ (на рис. 10

---

[1]) Смысл этих условий состоит в том, что проекция $x = u(s)$, $y = v(s)$ заданной кривой на плоскость XOY является кривой без особых точек, нигде не касающейся характеристических кривых уравнения (5).

[2]) См. T. Ważewski, Mathematica 8 (1933), стр. 103—116.

[3]) См. L. D. Rodabaugh, Duke Math. Journal 6 (1940), стр. 362—374; там же рассмотрен случай многосвязной области.

подобласть ограничена пунктирной линией), которая принадлежит внутренности полосы $a < x < b$, существует интеграл $\psi(x, y)$ уравнения (5), причем $\psi_y > 0$ всюду в этой подобласти[1]).

д) О продолжаемости интегральных поверхностей. Для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью любая интегральная кривая, будучи задана в произвольно малом интервале, допускает продолжение в обе стороны вплоть до границы области непрерывности функции $f(x, y)$. Соответствующий вопрос для дифференциальных уравнений в частных производных может быть поставлен так: допускает ли интеграл уравнения (5), заданный в подобласти $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$, распространение на бо́льшую подобласть области $\mathfrak{G}$? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицателен.

Рис. 11.

В самом деле, пусть, например, задано дифференциальное уравнение

$$p + xq = 0.$$

Его характеристические кривые — параболы $2y = x^2 + C$ (рис. 11). Если дифференциальное уравнение сначала рассмотреть в полуплоскости $y > 0$, то можно так построить решение, что оно будет принимать разные значения на левом и правом кусках каждой параболы, расположенной ниже параболы $2y = x^2$ (на рис. 11 эти куски изображены сплошной чертой, а участки этих парабол в полуплоскости $y < 0$ — пунктиром). Интеграл, полученный таким образом в полуплоскости $y > 0$, не может быть продолжен в интеграл во всей плоскости, поскольку этот последний должен принимать постоянное значение вдоль каждой из парабол $2y = x^2 + C$.

Следовательно, если требуется найти решение уравнения (5) в некоторой области, то из того, что нам удастся построить решение для ее маленькой подобласти, мы получим мало пользы (если, конечно, речь не идет об аналитических функциях).

2.7. Функциональная зависимость и якобиан. В обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях фигурирует понятие линейной зависимости функций. В уравнениях с частными производными употребляют общее понятие функциональной зависимости и критерий зависимости функций в этом более общем смысле[2]).

Две непрерывно дифференцируемые функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ функционально зависимы, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $\Omega(u)$, что имеет место соотношение

$$v(x, y) = \Omega(u(x, y)).$$

[1]) См. E. Kamke, Jahresbericht DMV **44** (1934), стр. 156—161; см. также п. 3.6 (в) и E. Kamke, Math. Annalen **99** (1928), стр. 602—615.

[2]) [См. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*]

Более общо[1]) для таких функций справедливо равенство

$$F(u(x, y), v(x, y)) = 0, \tag{9}$$

где $F(u, v)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка и

$$|F_u| + |F_v| > 0. \tag{10}$$

Дифференцируя (9) по обеим независимым переменным

$$F_u u_x + F_v v_x = 0, \qquad F_u u_y + F_v v_y = 0,$$

мы, в силу (10), получаем:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{11}$$

Обратно, если для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ выполнено условие (11), то они функционально зависимы.

В дальнейшем нам потребуется понятие функциональной зависимости для функций многих переменных.

Определение 1. Функции

$$u_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_q), \tag{12}$$

о которых мы будем предполагать, что они определены в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_q)$ пространства q переменных $x_1, \ldots, x_q$, называются *функционально зависимыми*, если существует функция $F(u_1, \ldots, u_p)$ со следующими свойствами:

(α) она определена во всем пространстве переменных $u_1, \ldots, u_p$ и имеет там непрерывные частные производные первого порядка;

(β) она не равна тождественно нулю ни в какой подобласти пространства переменных $u_1, \ldots, u_p$;

(γ) в области $\mathfrak{B}$ имеет место соотношение

$$\Phi(x_1, \ldots, x_q) = F(u_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_q)) \equiv 0.$$

Определение 2. Функции (12), заданные в открытой области, называются *функционально зависимыми*, если они зависимы в смысле определения 1 в каждой ограниченной замкнутой подобласти.

Определение 3. *Якобианом, определителем Якоби* или *функциональным определителем* для n функций

$$u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

---

[1]) При $F(u, v) \equiv v - \Omega(u)$ соотношение (9) переходит в предшествующее ему равенство.

от n независимых переменных, имеющих непрерывные частные производные первого порядка в некоторой области $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_n)$, называется определитель

$$J(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Критерий Якоби функциональной зависимости функций.

(а) Если функции (13), заданные в открытой области $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_n)$, имеют непрерывные частные производные первого порядка, то они функционально зависимы тогда и только тогда, когда их функциональный определитель

$$J(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\,^{1)}.$$

Примечания. 1) Зависимы ли функции (13), легко устанавливается с помощью приведенного критерия. Подход, основанный на явном отыскании функции F, довольно труден.

2) Вообще говоря, не следует отказываться от сложного определения зависимости и, в частности, от анализа в определениях 1 и 2, даже если предложение (а) выполнено. Рассмотрим пример ($n = 2$):

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= \sin x, \\ v(x, y) &= \sin x^2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Функциональный определитель, очевидно, тождественно равен нулю. Если во всей плоскости переменных x, y было бы выполнено условие (γ) в определении 1, т. е.

$$\Phi(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

то тогда мы получили бы

$$F(u, v) \equiv 0 \text{ в квадрате } |u| \leqslant 1, \ |v| \leqslant 1.$$

В самом деле, в силу (*), $F(u, v)$ обращается в нуль на всюду плотном множестве точек квадрата, и остается лишь использовать непрерывность этой функции Однако, тождественное обращение функции $F(u, v)$ в нуль на квадрате противоречит условию (β).

Этот пример, в частности, показывает, почему для открытых и замкнутых множеств были даны разные определения 1 и 2.

(б) Если функции (12) имеют в $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_q)$ непрерывные частные производные первого порядка, то при условии, что $p > q$, они функционально зависимы.

---

[1]) Хотя этот критерий был известен давно, впервые его четко сформулировали и строго доказали K. Knopp und R. Schmidt, Math. Zeitschrift **25** (1926), стр. 373—381. См. также A. Ostrowski, Jahresbericht DMV **36** (1927), стр. 129—134.

(в) Функции (12) при условии, что $p \leqslant q$, функционально независимы в $\mathfrak{G}$ в том случае, когда функциональная матрица[1])

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_q)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_q} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \end{pmatrix}$$

в $\mathfrak{G}$ имеет ранг p, т. е. если в $\mathfrak{G}$ существует хотя бы одна точка, в которой по крайней мере один минор порядка p этой матрицы отличен от нуля[1]).

(г) Если функции $u_1(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_{n+1})$ имеют в $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ непрерывные частные производные первого и второго порядка, то они функционально зависимы в том случае, когда функциональная матрица $\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+1})}$ в каждой точке области $\mathfrak{G}$ имеет наивысший ранг $n-1$, т. е. когда каждый определитель порядка n во всей области равен нулю[2]).

2.8. Главный интеграл; решение задачи Коши. Возвращаясь к общему уравнению (1), предположим, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, как и раньше, непрерывны в $\mathfrak{G}(x, y)$ и, кроме того, ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не обращаются одновременно в нуль.

(а) В этих предположениях любые два интеграла дифференциального уравнения (1) функционально зависимы в области $\mathfrak{G}$.

(б) Назовем *главным интегралом* в области $\mathfrak{G}$ такой интеграл уравнения (1), который ни в какой подобласти этой области не постоянен. Верно следующее предложение:

Если $\psi(x, y)$ — главный интеграл дифференциального уравнения (1) в области $\mathfrak{G}(x, y)$, то множество всех интегралов в $\mathfrak{G}(x, y)$ состоит только из тех функций $\chi(x, y)$, которые имеют в $\mathfrak{G}$ непрерывные частные производные первого порядка и которые функционально зависимы с ψ.

Если $\mathfrak{G}$ — характеристическое поле и $\psi_y \neq 0$, то все интегралы можно получить из формулы $\chi(x, y) = \omega(\psi(x, y))$, где $\omega(u)$

---

[1]) При $p = q = n$ левая часть следующего равенства, согласно определению 3, имеет двойное значение — она означает, с одной стороны, функциональную матрицу, а с другой, — функциональный определитель. В последующем, однако, всегда будет ясно, что именно имеется в виду.

[2]) См. G. Doetsch, Math. Annalen 99 (1928), стр. 590—601; A. B. Brown, Transactions Americ. Math. Soc. 38 (1935), стр. 379—394; A. Sard, Bulletin Americ. Math. Soc. 48 (1942), стр. 883—890; M. Kneser, Math. Zeitschrift 54 (1951), стр. 34—51, 55 (1951/52), стр. 400; E. Камке, Math. Zeitschrift 39 (1935), стр. 672—676.

пробегает все непрерывно дифференцируемые функции, определенные для значений ψ.

(в) Если функции f и g в односвязной области $\mathfrak{G}$ k раз непрерывно дифференцируемы ($k \geqslant 1$) и если там $|f| + |g| > 0$, то в каждой ограниченной подобласти $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, не имеющей общих точек с границей $\mathfrak{G}$, дифференциальное уравнение (1) имеет главный интеграл $\psi(x, y)$; функция $\psi(x, y)$ является k раз непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет неравенству $|\psi_x| + |\psi_y| > 0$ [1]).

(г) Если отыскивают интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через данную непрерывно дифференцируемую начальную кривую

$$x = u(s), \qquad y = v(s), \qquad z = w(s) \tag{14}$$

(*задача Коши*), то (см. п. 2.6 (б)) единственное решение можно найти лишь тогда, когда проекция кривой (14) на плоскость XOY

$$x = u(s), \quad y = v(s) \tag{15}$$

нигде не касается ни одной характеристической кривой, т. е. когда выполнено неравенство

$$u'(s)\, g(u, v) - v'(s)\, f(u, v) \neq 0.$$

Если это предположение выполнено, то через каждую точку кривой (15) проводят характеристическую кривую [2])

$$x = \varphi_1(t, u(s), v(s)), \qquad y = \varphi_2(t, u(s), v(s)),$$

т. е. строят то решение характеристической системы (3), которое при $t = 0$ проходит через точку $x = u(s)$, $y = v(s)$; эти характеристические кривые образуют характеристическое поле. Теперь три уравнения

$$x = \varphi_1(t, u(s), v(s)), \quad y = \varphi_2(t, u(s), v(s)), \quad z = w(s) \tag{16}$$

дают параметрическую запись искомой интегральной поверхности в указанном характеристическом поле, содержащем кривую (15). Два первых уравнения (16) определяют непрерывно дифференцируемые функции $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$; вторая из них вместе с третьим уравнением (16) дает явное уравнение интегральной поверхности.

---

[1]) Е. Камке, Math. Zeitschrift 42 (1937), стр. 287—294, 41 (1936), стр. 56—66).

[2]) [См. обозначения в п. 2.6 (а) или Камке, стр. 59 и 67. Поскольку правые части характеристической системы (3) не зависят от параметра t, то характеристические функции имеют как раз указанный здесь вид (см. примечание 2) на стр. 52). Для справедливости приводимого в настоящем пункте результата надо потребовать, чтобы коэффициенты уравнения (1) были непрерывно дифференцируемы. — *Прим. ред.*]

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$yp + xq = 0,$$

проходящую через начальную кривую

$$x = s, \qquad y = \alpha s, \qquad z = \omega(s) \qquad (\alpha \neq \pm 1).$$

Из характеристических уравнений

$$x'(t) = y, \qquad y'(t) = x$$

немедленно находим решение, которое при $t = 0$ проходит через произвольную точку $x = \xi$, $y = \eta$:

$$x = \frac{\xi + \eta}{2} e^t + \frac{\xi - \eta}{2} e^{-t}, \quad y = \frac{\xi + \eta}{2} e^t - \frac{\xi - \eta}{2} e^{-t}.$$

Поэтому первые два уравнения (16) имеют вид

$$x = \frac{1 + \alpha}{2} se^t + \frac{1 - \alpha}{2} se^{-t}, \quad y = \frac{1 + \alpha}{2} se^t - \frac{1 - \alpha}{2} se^{-t}.$$

Отсюда получаем $x + y = (1 + \alpha) se^t$, $x - y = (1 - \alpha) se^{-t}$, и, следовательно, $x^2 - y^2 = (1 - \alpha^2) s^2$. Окончательно, согласно третьему уравнению (16), получаем при $(y^2 - x^2)(\alpha^2 - 1) > 0$ уравнение искомой интегральной поверхности в виде

$$z = \omega\left(\pm \sqrt{\frac{y^2 - x^2}{\alpha^2 - 1}}\right),$$

причем верхний знак следует брать при $s > 0$, а нижний — в противном случае.

(д) Дифференциальное уравнение с особой точкой. Точка (x, y) называется *особой* для дифференциального уравнения (1), если в ней $f = g = 0$, и регулярной, если в ней $|f| + |g| > 0$[1]. Пусть в некоторой окрестности U начала координат определены и непрерывно дифференцируемы функции f и g. Пусть $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, но $|f| + |g| > 0$ во всех остальных точках окрестности U, так что начало координат является изолированной особой точкой для дифференциального уравнения (1) и точкой покоя[2] для характеристической системы (3). Если отличные от точки покоя траектории системы (3) в некоторой специально подобранной окрестности U начала координат плоскости XOY все без исключения замкнуты, то дифференциальное уравнение в U имеет главный интеграл $\psi(x, y)$, причем $|\psi_x| + |\psi_y| > 0$ вне начала координат[3].

---

[1]) См. также п. 8.6.

[2]) [Характеристическая система (3) является *автономной*, поскольку ее правые части f и g не зависят явно от независимого переменного t. *Точкой покоя* этой системы (положением равновесия) называется такая точка плоскости x, y, в которой обе правые части одновременно обращаются в нуль. Если решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ автономной системы изобразить как кривую на плоскости x, y (рассматривая t как параметр), то эта кривая называется *траекторией*. Подробнее см. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965. — *Прим. ред.*]

[3]) См. H. H. Alden, Americ. Journ. Math. 56 (1934), стр. 593—612; E. Digel, Math. Zeitschrift 42 (1937), стр. 231—237.

2.9. Замечания об использовании разложений в ряды. Для доказательства существования решения могут быть привлечены степенные ряды или ряды более общего вида (см. пп. 5.7 и 10.5). Однако итерационный метод, с большим успехом используемый в обыкновенных дифференциальных уравнениях, здесь к цели не ведет.

Следует упомянуть еще методы, рассматриваемые далее в пп. 4.4 и 12.11.

2.10. Методы решения. Имеются следующие методы решения уравнения (1):

(а) Метод характеристик (см. п. 2.4).

(б) Получение отдельных интегралов и, в частности, главного интеграла посредством комбинирования характеристических уравнений (см. п. 2.5). Из найденного главного интеграла можно, согласно п. 2.8 (б), получить все интегралы.

(в) Если надо определить интегральную поверхность, проходящую через данную начальную кривую (т. е. надо решить задачу Коши), то можно, если уже известен главный интеграл (или таковой легко находится), поступать по примеру п. 2.5 (г) или, если характеристическая система (3) легко интегрируется, поступать по примеру пп. 2.6 (б), 2.6 (в) и 2.8 (г).

(г) Использование разложений в ряды (см. п. 2.9).

(д) Если ни один из указанных методов не приводит к цели в силу непреодолимых аналитических трудностей, то можно характеристические уравнения (3) или (6) решить приближенным методом, а затем, следуя п. 2.8 (г), получить приближенное численное решение данного уравнения (1) с частными производными.

§ 3. Линейное однородное уравнение с n независимыми переменными: $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(r)\, p_\nu = 0$ [1]

3.1 Определения и замечания. *Линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции* $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ *n независимых переменных* имеет вид (ср. с п. 1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (1)$$

---

[1]) Изложение следует книге Kamke, DGlen, стр. 321—330. [См. также литературу, указанную перед § 1. — *Прим. ред.*]

или, употребляя обозначения $\mathbf{r}$ вместо вектора с компонентами $x_1, \ldots, x_n$ и $p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathbf{r})\, p_\nu = 0. \tag{1a}$$

Дифференциальное уравнение будет рассматриваться всегда только в такой области $\mathfrak{G}(\mathbf{r})$ пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой коэффициенты $f_\nu(\mathbf{r})$ непрерывны.

Каждое дифференциальное уравнение (1) имеет, очевидно, тривиальное решение $z = \text{const}$; интегралы, отличные от тривиального, мы будем называть нетривиальными.

Если $\psi_1(\mathbf{r}), \ldots, \psi_m(\mathbf{r})$ — интегралы уравнения (1) в $\mathfrak{G}$ и если $\Omega(u_1, \ldots, u_m)$ — функция, определенная на области значений функций ψ_ν и имеющая непрерывные частные производные первого порядка, то, как легко установить, сложная функция

$$\chi(\mathbf{r}) = \Omega(\psi_1(\mathbf{r}), \ldots, \psi_m(\mathbf{r}))$$

также является интегралом уравнения (1).

3.2. Характеристики и интегральные поверхности.

(а) *Характеристическими уравнениями* (*характеристической системой*), соответствующей дифференциальному уравнению (1), называют систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x'_\nu(t) = f_\nu(\mathbf{r}), \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Каждая интегральная кривая

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t) \tag{3}$$

этой системы или также соответствующая ей кривая

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t), \quad z = c \tag{4}$$

(c — произвольная постоянная) называется *характеристикой*[1]) дифференциального уравнения (1).

(б) Между интегралами дифференциального уравнения (1) — с одной стороны, и характеристиками — с другой, существует следующая важная связь:

Функция $\psi(\mathbf{r})$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка в $\mathfrak{G}$, тогда и только тогда является интегралом дифференциального уравнения (1), когда она вдоль каждой характеристической кривой (3) постоянна, т. е. когда $\psi(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \text{const}$ для любой кривой (3).

[1]) В отличие от (4), интегральные кривые (3) мы будем называть также *характеристическими кривыми*.

(в) Если две интегральные поверхности $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\psi_2(\mathbf{r})$ уравнения (1) имеют хотя бы одну общую точку ($\mathbf{r}_0$, $z=c$), то они также имеют общей и всю характеристику, проходящую через эту точку.

3.3. Решение уравнения посредством комбинирования характеристических уравнений. С помощью 3.2 (б) удается в ряде случаев отыскивать решение конкретного дифференциального уравнения типа (1). Этот метод мы продемонстрируем на двух примерах.

(а)
$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Искомая функция здесь $w=w(x, y, z)$. Характеристические уравнения имеют вид
$$x'(t)=x, \quad y'(t)=y, \quad z'(t)=x^2+y^2.$$
Из первых двух характеристических уравнений следует, что
$$yx'-xy'=0, \quad \text{или} \quad \frac{x}{y}=\text{const},$$
вдоль каждой характеристической кривой. Поэтому функция $\psi_1=\frac{x}{y}$ — интеграл в каждой из полуплоскостей $y>0$ и $y<0$. Из всех трех характеристических уравнений, далее, получаем:
$$2xx'+2yy'-2z'=0, \quad \text{или} \quad x^2+y^2-2z=\text{const},$$
вдоль каждой характеристической кривой. Поэтому функция $\psi_2=x^2+y^2-2z$ — также интеграл. Таким образом, функции ψ_1 и ψ_2 образуют интегральный базис (см. п. 3.4)

(б)
$$xz\frac{\partial w}{\partial x}-yz\frac{\partial w}{\partial y}+(y^2-x)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Первые два из характеристических уравнений
$$x'(t)=xz, \quad y'(t)=-yz, \quad z'(t)=y^2-x$$
дают нам соотношение
$$yx'+xy'=0, \quad \text{или} \quad xy=\text{const},$$
вдоль каждой характеристической кривой; все три уравнения дают другое соотношение:
$$x'+yy'+zz'=0, \quad \text{или} \quad 2x+y^2+x^2=\text{const},$$
вдоль каждой характеристической кривой. Поэтому $\psi_1=xy$ и $\psi_2=2x+y^2+z^2$ — интегралы данного дифференциального уравнения, образующие базис (см. п. 3.4).

Как показывают приведенные примеры, иногда можно, удачно комбинируя характеристические уравнения, получить интегрируемую комбинацию, первообразная которой не зависит от параметра t.

3.4. Фундаментальная система интегралов; задача Коши.

(а) Система $n-1$ интегралов
$$\psi_1(\mathbf{r}), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(\mathbf{r}) \tag{5}$$

дифференциального уравнения (1) в области $\mathfrak{G}$ называется *фундаментальной системой* интегралов (*интегральным базисом*), если функциональная матрица (см. п. 2.7 (в))

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \tag{5a}$$

в каждой подобласти области $\mathfrak{G}$ имеет ранг $n-1$, т. е. если там по крайней мере один определитель $(n-1)$-порядка хотя бы в одной точке отличен от нуля.

В силу п. 2.7 (в) в каждой подобласти области $\mathfrak{G}$ функции $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ между собой функционально независимы. Обратно, из п. 2.7 (г) следует, что $n-1$ дважды непрерывно дифференцируемых интегралов, независимых в каждой подобласти, образуют в области $\mathfrak{G}$ интегральный базис.

Если функции (5) образуют в области $\mathfrak{G}$ интегральный базис дифференциального уравнения (1), то множество всех интегралов уравнения (1) в этой области состоит из всех тех непрерывно дифференцируемых в $\mathfrak{G}$ функций, которые функционально зависимы с функциями (5).

Относительно выражения любого интеграла через интегральный базис в некотором характеристическом поле см. п. 3.6 (б).

Если (5) — фундаментальная система интегралов уравнения (1), для которой функциональная матрица (5a) в каждой точке области $\mathfrak{G}$ имеет ранг $n-1$, и если ψ_ν дважды непрерывно дифференцируемы, то

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \psi_\nu + a_n$$

— полный интеграл в смысле п. 12.1.

(б) Если требуется найти интеграл уравнения (1), обращающийся при $x_1 = \xi$ в некоторую данную функцию $\omega(x_2, \ldots, x_n)$ (*задача Коши*) при условии, что известен интегральный базис (5) этого уравнения, то разыскивают непрерывно дифференцируемую функцию $\Omega(u_1, \ldots, u_{n-1})$ такую, чтобы

$$\Omega(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = \omega(x_2, \ldots, x_n) \quad \text{для} \quad x_1 = \xi.$$

Тогда (см. п. 3.1)

$$\psi(\mathbf{r}) = \Omega(\psi_1(\mathbf{r}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{r}))$$

есть интеграл требуемого вида (ср. с п. 2.5 (г)). Этот метод может быть также использован для удовлетворения более общих начальных условий.

Если в примере 3.3 (б) требуется найти интеграл $w(x, y, z)$, принимающий значение

$$w(x, y, z) = y^2 - z^2 \quad \text{при} \quad x = y,$$

то определяют функцию $\Omega(u, v)$ так, чтобы

$$\Omega(\psi_1, \psi_2) = y^2 - z^2 \quad \text{при} \quad x = y,$$

т. е.

$$\Omega(u, v) = y^2 - z^2 \quad \text{для} \quad u = y^2, \quad v = 2y + y^2 + z^2. \tag{*}$$

Если разрешить последние два уравнения (*) относительно y и z и подставить результат в первое уравнение (*), то получится выражение для функции Ω:

$$\Omega(u, v) = 2(u \pm \sqrt{u}) - v.$$

Итак, искомый интеграл для $xy > 0$ имеет вид

$$w(x, y, z) = \Omega(\psi_1, \psi_2) = 2(xy \pm \sqrt{xy}) - 2x - y^2 - z^2;$$

знаки + или − требуется брать в зависимости от того, положителен или отрицателен y.

3.5. Редукция уравнения в случае, если известны частные интегралы. Если уже найдены некоторые частные интегралы дифференциального уравнения (1), то его можно свести к уравнению с меньшим числом независимых переменных.

(a) Пусть в области $\mathfrak{G}$ известно $k < n - 1$ интегралов уравнения (1):

$$\psi_1(\mathbf{r}), \ \ldots, \ \psi_k(\mathbf{r}), \tag{6}$$

и пусть в этой области функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)} \neq 0. \tag{6a}$$

Преобразованием независимых переменных

$$\begin{aligned} &y_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ y_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_n), \\ &y_{k+1} = x_{k+1}, \ \ldots, \ y_n = x_n \end{aligned} \tag{7}$$

область $\mathfrak{G}$ отображается взаимно однозначно[1]) на область $\overline{\mathfrak{G}}(y_1, \ldots, y_n)$. При этом функции $f_{k+1}, \ldots, f_n$, которые зависели от x_ν, перейдут в функции $\bar{f}_{k+1}, \ldots, \bar{f}_n$, зависящие от y_ν.

После замены получается уравнение

$$\sum_{\nu=k+1}^{n} \bar{f}_\nu(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\nu} = 0 \tag{8}$$

относительно функции ζ, причем здесь $y_{k+1}, \ldots, y_n$ — независимые переменные, а $y_1, \ldots, y_k$ — параметры. Если

$$\bar{\psi}_{k+1}(y_1, \ldots, y_n), \ \ldots, \ \bar{\psi}_{n-1}(y_1, \ldots, y_n) \tag{9}$$

---

[1]) Взаимная однозначность вытекает из условия (6а).

— интегралы уравнения (8) в $\overline{\mathfrak{G}}$, которые по всем своим аргументам имеют непрерывные частные производные и для которых в этой области якобиан

$$\frac{\partial(\overline{\psi}_{k+1}, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})}{\partial(y_{k+1}, \ldots, y_{n-1})} \neq 0,$$

то функции $\psi_{k+1}, \ldots, \psi_{n-1}$, получающиеся из функций (9) преобразованием, обратным к (7), вместе с функциями (6) образуют в $\mathfrak{G}$ интегральный базис уравнения (1); другими словами, во всех точках области $\mathfrak{G}$ якобиан

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

По поводу редукции при помощи мультипликаторов смотри п. 3.8.

(б) Пример. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + xz\dfrac{\partial w}{\partial y} - xy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Второе и третье уравнения характеристической системы

$$x' = 1, \quad y' = xz, \quad z' = -xy$$

дают нам соотношение $yy' + zz' = 0$, которое показывает, что $y^2 + z^2 = \text{const}$ вдоль каждой характеристической кривой. Таким образом, в силу п. 3.2 (б) $\psi_1 = y^2 + z^2$ — интеграл.

Сделаем, далее, замену переменных (см. (7)):

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y^2 + z^2, \quad \overline{z} = z;$$

при этом преобразовании полупространство $y > 0$ взаимно однозначно отображается на внутренность параболического цилиндра $\overline{y} > \overline{z}^2$, причем там $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} \neq 0$. Поэтому можно применить изложенный в (а) метод.

Уравнение (8) в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}} - \overline{x}\sqrt{\overline{y} - \overline{z}^2}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}} = 0; \tag{*}$$

его характеристическое уравнение (см. п. 2.6)

$$\frac{d\overline{z}}{d\overline{x}} = -\overline{x}\sqrt{\overline{y} - \overline{z}^2}$$

($\overline{y}$ — параметр) немедленно интегрируется разделением переменных. Решая его, находим интеграл уравнения (*):

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\overline{z}}{\sqrt{\overline{y}}} + \frac{1}{2}\overline{x}^2.$$

В силу п. 3.1, синус этой функции — снова интеграл, т. е.

$$\overline{\psi} = \frac{\overline{z}}{\sqrt{\overline{y}}}\cos\frac{\overline{x}^2}{2} + \sqrt{1 - \frac{\overline{z}^2}{\overline{y}}}\,\sin\frac{\overline{x}^2}{2}$$

есть решение уравнения (*).

Возвращаясь к переменным x, y, z, получаем интеграл для первоначального дифференциального уравнения

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\left(y \sin\frac{x^2}{2} + z \cos\frac{x^2}{2}\right).$$

Согласно п. 3.1, любая непрерывно дифференцируемая функция интегралов ψ и ψ_1 — снова интеграл; в частности,

$$\psi_2 = \psi\sqrt{\psi_1} = y \sin\frac{x^2}{2} + z \cos\frac{x^2}{2}$$

— также интеграл исходного дифференциального уравнения.

Функции ψ_1, ψ_2, как легко можно показать, образуют во всем пространстве интегральный базис данного дифференциального уравнения.

(**в**) Для практического вычисления удобнее другая форма редукционного метода. Мы рассмотрим ее использование на том же примере, что и в (б).

Из характеристических уравнений было найдено, что $y^2+z^2=c_1^2$ для каждой характеристической кривой, т. е.

$$y = \sqrt{c_1^2 - z^2}.$$

Далее, из первого характеристического уравнения можно получить $t=x$.

Используя это, перепишем третье характеристическое уравнение в форме уравнения с разделяющимися переменными:

$$z' = -x\sqrt{c_1^2 - z^2};$$

следовательно,

$$\operatorname{Arcsin}\frac{z}{c_1} + \frac{x^2}{2} = c_2$$

вдоль каждой характеристической кривой, т. е. функция

$$\psi^*(x, y, z) = \operatorname{Arcsin}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{x^2}{2}$$

постоянна вдоль каждой характеристической кривой. Поэтому ψ^* — интеграл данного дифференциального уравнения. Вместе с ψ^* интегралом является и функция

$$\psi = \sin\psi^* = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\left(y \sin\frac{x^2}{2} + z \cos\frac{x^2}{2}\right),$$

найденная раньше в (б).

3.6. Частный случай: $p + \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y)\, q_\nu = 0$. Если некоторый коэффициент уравнения (1) во всей рассматриваемой области не обращается в нуль, то после деления всех членов уравнения на этот коэффициент и несущественных преобразований можно привести дифференциальное уравнение (1) к виду

$$p + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y)\, q_\nu = 0; \tag{10}$$

здесь $z = z(x, \mathbf{y})$ — искомая функция, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}$, а $\mathbf{y}$ означает вектор с компонентами $y_1, \ldots, y_n$. Соответствующая уравнению (10) характеристическая система выглядит так:

$$y'_\nu(x) = f_\nu(x, \mathbf{y}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

В этом пункте от коэффициентов $f_\nu(x, \mathbf{y})$ мы будем требовать, чтобы они имели непрерывные частные производные по y_μ, $\mu = 1, \ldots, n$, в области $\mathfrak{G}(x, \mathbf{y})$.

(а) Основная теорема существования. При названных предположениях характеристические функции $\varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ системы (11) имеют[1]) в своей области существования непрерывные частные производные первого порядка по всем $n+2$ аргументам и, согласно Линделёфу, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_\nu} = 0,$$

причем

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)} > 0.$$

При фиксированном x_0 эти характеристические функции

$$\psi_k(x, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_k(x_0, x, y_1, \ldots, y_n) \tag{12}$$
$$(k = 1, \ldots, n)$$

образуют интегральный базис дифференциального уравнения (10) в каждой области, в которой эти функции существуют[2]).

Если l — открытый связный кусок плоскости $x = x_0$, целиком лежащий в $\mathfrak{G}$, то область существования $G(l)$ функций (12) (являющаяся подобластью области $\mathfrak{G}$), которая образована проходящими через l интегральными кривыми системы (11), называется *характеристическим полем* уравнения (10).

(б) Задача Коши. В задаче Коши требуется найти интеграл $z = \psi(x, \mathbf{y})$, принимающий на плоскости[3]) $x = x_0$ заданное значение $\omega(\mathbf{y})$, т. е. $\psi(x_0, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y})$.

Если характеристические функции (12) удовлетворяют в области $G(l)$ неравенствам $A_\nu < \varphi_\nu < B_\nu$ и если функция $\omega(\mathbf{y})$ непрерывно дифференцируема для $A_\nu < y_\nu < B_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, то в области $G(l)$ существует единственное решение задачи Коши, а именно:

$$\psi(x, \mathbf{y}) = \omega(\varphi_1(x_0, x, \mathbf{y}), \ldots, \varphi_n(x_0, x, \mathbf{y})). \tag{13}$$

---

[1]) [См. Камке, стр. 59. — *Прим. ред.*]

[2]) Более общую теорему существования, когда коэффициенты уравнения зависят еще и от параметра, см. в п. 4.3.

[3]) [Автор называет эту плоскость Normalebene. — *Прим. ред.*]

Легко установить аналитически, что правая часть равенства (13) непрерывно дифференцируема по x и по y_ν и $\varphi_\nu(x_0, x_0, \mathfrak{y}) = y_\nu$, а потому правая часть этого равенства $x = x_0$ принимает значение $\omega(\mathfrak{y})$. Геометрически интегральную поверхность можно построить так: проводят через каждую точку начальной поверхности

$$(x_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n))$$

характеристики

$$\left.\begin{aligned} y_\nu &= \varphi_\nu(x, x_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) \qquad \nu = 1, \ldots, n, \\ z &= \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и исключают η_ν. Для этого из первых n уравнений (14), определяющих характеристические кривые, находят

$$\eta_\nu = \varphi_\nu(x_0, x, y_1, \ldots, y_n),$$

что после подстановки в последнее уравнение (14) как раз и дает соотношение (13).

Пусть $\mathfrak{G}$ — полоса[1])

$$a < x < b, \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty,$$

и пусть все функции f_ν или $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$ ограничены в $\mathfrak{G}$. Тогда если l является плоскостью $x = x_0$, $a < x_0 < b$, то $G(l)$ совпадает с $\mathfrak{G}$. В этом случае можно задать значение интеграла на произвольной плоскости $x = x_0$, $a < x_0 < b$, и он будет однозначно определен во всей полосе $\mathfrak{G}$.

(в) О существовании нетривиального интеграла в произвольной области. Для дифференциального уравнения (10) во всей области $\mathfrak{G}$ может не существовать нетривиального интеграла. С другой стороны, имеет место следующая теорема существования[2]):

Пусть функции $f_\nu(x, \mathfrak{y})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ограничены в $\mathfrak{G}(x, \mathfrak{y})$ и, кроме того, имеют там непрерывные частные производные по y_μ. Пусть a — нижняя, b — верхняя грани (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ допускаются) абсцисс x точек $(x, \mathfrak{y}) \in \mathfrak{G}$. Тогда в каждой подобласти $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$, принадлежащей открытой полосе

$$a < x < b, \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty,$$

существует для уравнения (10) интегральный базис $\psi_\nu(x, \mathfrak{y})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, для которого во всей области $\mathfrak{G}$ функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} > 0.$$

---

[1]) Случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ допускаются.

[2]) См. Камке, Jahresbericht, DMV, 44 (1934), стр. 156—161.

3.7. Решение задачи Коши.

(а) Для дифференциального уравнения (1) в общем случае нет теоремы существования, аналогичной теореме п. 2.8 (в).

Пример. Рассмотрим уравнение (см. ч. II, 3.45)

$$[(x^2+y^2-1)\,x+y]\frac{\partial w}{\partial x}+[(x^2+y^2-1)\,y-x]\frac{\partial w}{\partial y}+2z\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

В односвязной области $\mathfrak{G}$, получающейся из x, y, z-пространства исключением точек $z\leqslant 0$ оси z, коэффициенты дифференцируемы сколько угодно раз и нигде одновременно не обращаются в нуль. Но каждая область, содержащая характеристику $x^2+y^2=1$, $z=0$, имеет подобласть, в которой любой интеграл заданного дифференциального уравнения является константой.

(б) Обобщенная задача Коши (задача с начальными данными) состоит в следующем: требуется найти интеграл уравнения (1), который принимает заданное значение

$$z=u(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}) \tag{15}$$

в области $\mathfrak{g}(\mathfrak{r})$, заданной параметрически

$$x_\nu=u_\nu(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Задача разрешима при следующих предположениях[1]). Рассмотрим коэффициенты $f_\nu(\mathfrak{r})$ в области $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$, и пусть функции u_ν и u непрерывно дифференцируемы в области $H(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1})$. Точки области $\mathfrak{g}$ должны принадлежать $\mathfrak{G}$, а в области H определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1,\ \ldots,\ u_n),\ \ldots,\ f_n(u_1,\ \ldots,\ u_n) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_{n-1}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{16}$$

Через точки области $\mathfrak{g}$ проводят характеристические кривые[2])

$$x_\nu=\varphi_\nu(t,\ \tau,\ u_1,\ \ldots,\ u_n),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n, \tag{17}$$

которые определяют характеристическое поле $G(H)$ в области $\mathfrak{G}$. Уравнения (17) и (15) дают (в параметрической форме) искомый интеграл в каждой такой части $G(H)$, которая содержит область $\mathfrak{G}$

[1]) См. Курант, стр. 78—83. Там же исследуется случай, когда определитель (16) обращается в нуль.

[2]) Поскольку правые части характеристической системы (2) не зависят от t, получаем следующее выражение для интегральной кривой этой системы, проходящей при $t=\tau$ через точку $(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$:

$$\varphi_\nu(t,\ \tau,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=\varphi_\nu(t-\tau,\ 0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\ \nu=1,\ \ldots,\ n$$

(см. Камке, стр. 59 и 67). В дальнейшем аргумент 0 мы отбрасываем и принимаем $\tau=0$.

и в которой разрешение уравнений (17) дает $t, t_1, \ldots, t_{n-1}$ как непрерывно дифференцируемые функции от $x_1, \ldots, x_n$. В силу (16), это заведомо возможно в достаточно малой окрестности области $\mathfrak{G}$.

3.8. Множители Якоби. Хотя обычно теория множителей Якоби[1] рассматривается для дифференциального уравнения (1), тем не менее предполагается, что один из коэффициентов этого уравнения не обращается в нуль. Поэтому с самого начала мы будем записывать рассматриваемое уравнение в форме (10).

Непрерывная и не обращающаяся в нуль в некоторой области $\mathfrak{G}(x, y)$ функция $M = M(x, y)$ называется *множителем Якоби* дифференциального уравнения (10), если существуют непрерывно дифференцируемые функции $\psi_1(x, y), \ldots, \psi_n(x, y)$ такие, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $z(x, y)$ справедливо равенство

$$M\left\{\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}\right\} = \frac{\partial(z, \psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(x, y_1, \ldots, y_n)}. \tag{18}$$

Легко убедиться, что

$$M = \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}, \tag{19}$$

а функции ψ_ν образуют интегральный базис уравнения (10). Обратно, якобиан (19) для каждого интегрального базиса $\psi_1, \ldots, \psi_n$ является множителем Якоби уравнения (10), т. е. верно тождество (18).

Вне зависимости от знания интегрального базиса можно сформулировать следующие предложения о множителе Якоби дифференциального уравнения (10).

Если коэффициенты $f_\nu(x, y)$ в области $\mathfrak{G}(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по y_μ, то условие

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(M f_\nu)}{\partial y_\nu} = 0 \tag{20}$$

является необходимым для того, чтобы непрерывно дифференцируемая в $\mathfrak{G}$ функция $M(x, y)$ была там множителем Якоби уравнения (10).

Обратно, если коэффициенты f_ν во всем x, y-пространстве ограничены, непрерывны и по y_μ дважды непрерывно дифференцируемы, то любая, всюду непрерывно дифференцируемая функция $M(x, y) \neq 0$,

---

[1]) См., например, Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, Leipzig und Berlin, 1924, а также E. Kamke, Journal für Math. **161** (1929), стр. 195—197. Поскольку множители (мультипликаторы) Якоби не имеют большого значения для фактического решения дифференциального уравнения (1), мы ограничимся здесь лишь несколькими замечаниями.

удовлетворяющая соотношению (20), является множителем Якоби уравнения (10). В частности, если коэффициенты f_ν непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}$ по y_μ и если в некотором характеристическом поле $G(l)$ уравнения (10) выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu} = 0,$$

то уравнение (10) имеет в $G(l)$ множитель Якоби $M = 1$.

Знание множителей Якоби может быть использовано для нахождения последнего недостающего интеграла в интегральном базисе. Действительно, пусть [1]) для уравнения (10) известен $n-1$ интеграл $\psi_1(x, \mathfrak{y}), \ldots, \psi_{n-1}(x, \mathfrak{y})$, $\dfrac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})} \neq 0$ и множитель Якоби $M(x, \mathfrak{y})$. Введем новые переменные (ср. с п. 3.5 (а)):

$$\bar{z}(\bar{x}, \bar{\mathfrak{y}}) = z(x, \mathfrak{y}), \qquad \bar{x} = x,$$

$$\bar{y}_1 = \psi_1(x, \mathfrak{y}), \ \ldots, \ \bar{y}_{n-1} = \psi_{n-1}(x, \mathfrak{y}), \qquad \bar{y}_n = y_n;$$

тогда дифференциальное уравнение (10) примет специальный вид

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} + g(\bar{x}, \bar{\mathfrak{y}}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}_n} = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\bar{y}_n'(\bar{x}) = g(x, \mathfrak{y})$$

($\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ — параметры) имеет интегрирующий множитель [2]) $M : \dfrac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}$. Таким образом, после введения новых переменных $\bar{y}_\nu$ уравнение (10) может быть решено квадратурами.

3.9. Методы решения. Имеются следующие методы решения уравнения (1):

(а) Изучение интегральных поверхностей посредством характеристик (см. п. 2.4).

(б) Получение отдельных интегралов или интегрального базиса посредством комбинирования характеристических уравнений (см. п. 3.3). Если найден один или более независимых интегралов, то, в силу п. 3.5 (а), дифференциальное уравнение можно редуцировать к уравнению с меньшим числом независимых переменных. Иногда для получения полного интегрального базиса удается воспользоваться

---

[1]) Точные предположения здесь не формулируются.

[2]) См. Камке, стр. 52.

множителями Якоби (см. п. 3.8). Из интегрального базиса можно, согласно п. 3.4 (а), получить все интегралы.

(в) Если требуется определить интеграл с данным начальным значением (задача Коши), то можно, если уже известен интегральный базис (или таковой может быть легко найден), поступать по примеру п. 3.4 (б). Можно воспользоваться также методом пп. 3.6 и 3.7 (примеры см. в пп. 2.6 (б), 2.6 (в), 2.8 (г)).

(г) Использование разложений в ряды (см. п. 2.9).

(д) Если ни один из указанных методов не ведет к цели, в силу непреодолимых аналитических трудностей, то можно характеристические уравнения (2) или (11) решать приближенными методами, а затем, используя начальные условия, получить приближенное численное решение данного уравнения с частными производными.

§ 4. Общее линейное уравнение: $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(r)\, p_\nu + f_0(r)\, z = f(r)$

4.1. Определения. *Общее (неоднородное) линейное*[1]) *дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции* $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ от n *независимых переменных* имеет вид (см. п. 1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} + f_0(x_1, \ldots, x_n)\, z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

или, используя сокращенные обозначения $p_\nu = \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$ и r вместо $x_1, \ldots, x_n$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(r)\, p_\nu + f_0(r)\, z = f(r). \qquad (1a)$$

Мы будем называть линейное уравнение *укороченным*[2]), если $f(r) \equiv 0$. Это уравнение будет называться *однородным*, если, кроме того, $f_0(r) \equiv 0$ (см. пп. 1.1 и 3.1).

Очевидно, верны следующие предложения: если $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ — любые два решения уравнения (1), то $z = \psi_1 - \psi_2$ — решение соответствующего укороченного уравнения; если ψ_0 — какое-либо решение уравнения (1) и если ψ пробегает все решения соответствующего укороченного уравнения, то $z = \psi_0 + \psi$ пробегает все решения уравнения (1).

---

[1]) [Иногда, впрочем, линейным неоднородным уравнением называют уравнение типа § 5 (1); см., например, Степанов. — *Прим. ред.*]

[2]) Иногда под укороченным уравнением понимают однородное уравнение в более узком смысле.

4.2. Сведение общего линейного уравнения к однородному.

(а) Сведение к $(n+1)$-членному однородному уравнению. Поскольку уравнение (1) является частным случаем квазилинейного дифференциального уравнения § 5 (1), оно, согласно п. 5.4, приводится к $(n+1)$-членному линейному однородному уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathfrak{r}) \frac{\partial w}{\partial x_\nu} + [f(\mathfrak{r}) - f_0(\mathfrak{r}) z] \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Характеристические уравнения

$$\begin{cases} x'_\nu(t) = f_\nu, & \nu = 1, \ldots, n, \\ z'(t) = f - z f_0 \end{cases}$$

этого последнего называют также *характеристическими уравнениями* уравнения (1). Если первые n этих характеристических уравнений разрешены, то решения последнего уравнения находятся квадратурами.

(б) Сведение к n-членному однородному уравнению. Это n-членное линейное однородное уравнение имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathfrak{r}) p_\nu = 0. \tag{2}$$

В соответствии с § 3 для уравнения (2) в области $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$ может быть получен интегральный базис $\psi_1(\mathfrak{r}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathfrak{r})$. Поскольку в области $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0,$$

то после преобразования (ср. с п. 3.5 (а))

$$y_1 = \psi_1(\mathfrak{r}), \ \ldots, \ y_{n-1} = \psi_{n-1}(\mathfrak{r}), \quad y_n = x_n \tag{3}$$

область $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$ взаимно однозначно отобразится на область $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{y})$, а интегралы уравнения (1) будут непрерывно дифференцируемыми по всем y_ν функциями $z(\mathfrak{r}) = \zeta(\mathfrak{y})$, удовлетворяющими дифференциальному уравнению

$$g_n(\mathfrak{y}) \zeta_{y_n} + g_0(\mathfrak{y}) \zeta = g(\mathfrak{y}); \tag{4}$$

здесь g_n, g_0, g — функции, полученные преобразованием (3) из f_n, f_0, f. Уравнение (4) — обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с независимой переменной y_n и параметрами $y_1, \ldots, y_{n-1}$; оно может быть проинтегрировано в квадратурах.

Таким образом, в переменных (3) левая часть уравнения (1) имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(r)\, p_\nu + f_0(r)\, z = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_{y_k} \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \frac{\partial \psi_k}{\partial x_\nu} + g_n \zeta_{y_n} + g_0 \zeta,$$

причем внутренняя сумма справа после определения ψ_k имеет значение нуль.

Отметим, что оба метода (а) и (б) сводятся один к другому.

4.3. Теорема существования и единственности. Такая теорема верна в целом в некоторой определенной области лишь в случае, когда один из коэффициентов f_ν не обращается в нуль [1]). Тогда можно, разделив все члены уравнения на этот коэффициент, получить уравнение, имеющее один коэффициент, равный единице. Считая, что коэффициенты зависят еще и от параметра (такие уравнения иногда встречаются; см. п. 6.4), можно записать исходное уравнение в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} + f_0(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})\, z = f(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}), \qquad (5)$$

здесь $\mathbf{y}$ означает набор $y_1, \ldots, y_n$, а $\boldsymbol{\lambda}$ — набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Предположение. В области

$$a \leqslant x \leqslant b\ ^{2)}, \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty, \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*\ ^{3)}$$

функции f_ν $(\nu \geqslant 1)$ при каждом фиксированном λ ограничены, а все f_ν и f непрерывны. Далее, частные производные $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$, $\frac{\partial f_\nu}{\partial \lambda_\varkappa}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ и $\frac{\partial f}{\partial y_\mu}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda_\varkappa}$ существуют, непрерывны и $k-1$ раз $(k \geqslant 1)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим $m+n+1$ аргументам. Наконец, рассмотрим в области

$$-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty, \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$$

k раз непрерывно дифференцируемую по всем $m+n$ аргументам функцию $\omega(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$.

---

[1]) См., однако, п. 5.6 (б) для $n = 2$.

[2]) В этом неравенстве один или оба знака равенства могут быть опущены; случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются.

[3]) Это предположение можно заменить следующим: при каждом фиксированном значении λ частные производные $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_k}$ $(\nu \geqslant 1)$ ограничены.

Утверждение. Для любых ξ, λ из интервалов

$$a \leqslant \xi \leqslant b, \qquad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*\ ^{1)}$$

уравнение (5) имеет в области

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$$

единственный интеграл

$$z = \psi(x, y; \xi, \lambda)$$

с начальным значением

$$\psi(\xi, y; \xi, \lambda) = \omega(y, \lambda).$$

Этот интеграл k раз непрерывно дифференцируем по всем $m+n+2$ аргументам.

Если

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

— характеристические функции [2] системы

$$y'_\nu(x) = f_\nu(x, y, \lambda), \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

то параметрическое представление интеграла таково:

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

$$z = e^{-F_0}\left\{\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) + \int_\xi^x f(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, e^F\, dx\right\},$$

где

$$F_0 = F_0(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \int_\xi^x f_0(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, dx \text{ —}$$

известная функция [3].

4.4. Неравенство Хаара. Пусть в области G, определяемой неравенствами [4])

$$\xi \leqslant x < c; \quad \alpha_\nu + A(x-\xi) \leqslant y_\nu \leqslant \beta_\nu - A(x-\xi), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$
$$\beta_\nu - \alpha_\nu > 2A(c-\xi),$$

---

[1]) См. подстр. прим. [2]) на стр. 46.

[2]) То есть интегральные кривые системы (6), проходящие через точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$.

[3]) См. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 275.

[4]) [Эта область напоминает усеченную пирамиду, и автор называет ее Pyramidenbereich. — *Прим. ред.*]

задана непрерывно дифференцируемая функция $z(x, y)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant A \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial z}{\partial y_\nu}\right| + B|z| + C, \quad A > 0,\ B > 0,\ C \geqslant 0;$$
$$-\omega(y) \leqslant z(\xi, y) \leqslant \omega(y),$$

причем функция $\omega(y)$ непрерывно дифференцируема при $\alpha_\nu \leqslant y_\nu \leqslant \beta_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, и такова, что

$$\omega \geqslant 0; \quad \omega_{y_\nu} \geqslant 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Тогда в области G имеет место *неравенство Хаара* [1])

$$|z(x, y)| \leqslant \frac{C}{B}\left(e^{B(x-\xi)} - 1\right) + e^{B(x-\xi)}\omega(\bar{y}),$$

где $\bar{y}_\nu = y_\nu + A(x - \xi)$, $\nu = 1, \ldots, n$.

4.5. Дополнения для случая $n = 2$.

(а) Рассмотрим в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 12) со сторонами, параллельными осям, непрерывно дифференцируемые функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, причем $f \geqslant 0$ $(f \leqslant 0)$. Пусть, далее, L — непрерывно дифференцируемая кривая с отрицательной (положительной) производной, соединяющая точки B и D (A и C), и пусть на этой кривой задана непрерывно дифференцируемая функция $\omega(x)$. Тогда дифференциальное уравнение

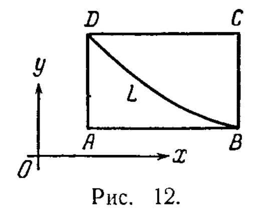


Рис. 12.

Рис. 13.

$$p + f(x, y)q = g(x, y)z + h(x, y)$$

имеет в прямоугольнике $ABCD$ единственное решение, принимающее на L значение ω [2]).

(б) Пусть в трапеции $0 \leqslant x \leqslant a$, $|y| + Ax \leqslant b$ (рис. 13) функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, f_y, g_y непрерывны и таковы, что

$$|f| \leqslant A, \ |f_y| \leqslant B, \ |g| \leqslant \frac{Cx^k}{k!}, \quad |g_y| \leqslant \frac{Dx^l}{l!} \quad (k, l \geqslant 0).$$

---

[1]) См. A. Haar, Acta Szeged 4 (1928), стр. 103, Atti Congresso Intern.; Bologna, 1928, III, стр. 5—10; Nagumo, Journal of Math. 15 (1938), стр. 51—56; J. Szarski, Annales Soc. Polon 21 (1948), стр. 7—25, а также п. 12.11 этой книги.

[2]) См. A. Colucci, Atti Torino 64 (1928—29), стр. 219—234.

Тогда [1]) уравнение

$$p = f(x, y) q + g(x, y)$$

имеет в этой трапеции единственный интеграл, обращающийся в нуль при $x = 0$; для этого интеграла справедлива оценка:

$$|z| \leqslant \frac{Cx^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad |z_y| \leqslant \frac{De^{aB} x^{l+1}}{(l+1)!}.$$

(в) Рассматривается [2]) уравнение

$$f(x, y) p + g(x, y) q = [\rho h(x, y) + k(x, y, \rho)] z.$$

Функции f и g в некоторой окрестности точки $x = a$, $y = b$ предполагаются регулярными аналитическими. Кроме того, предположим, что функция $k(x, y, \rho)$ разлагается в асимптотический ряд

$$k \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(x, y) \rho^{-\nu}$$

с коэффициентами $\gamma_\nu(x, y)$, которые в той же окрестности являются регулярными аналитическими. Если положить

$$z = u(x, y, \rho) e^{\varphi(x, y) \rho},$$

то из данного уравнения следует:

$$u\rho (f\varphi_x + g\varphi_y - h) + fu_x + gu_y - ku = 0.$$

Если выбрать в качестве φ решение линейного дифференциального уравнения

$$f\varphi_x + g\varphi_y = h,$$

то мы придем к уравнению

$$fu_x + gu_y = ku,$$

для решений которого можно получить асимптотическое представление.

§ 5. Квазилинейное уравнение: $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(r, z) p_\nu = g(r, z)$ [3])

5.1. Геометрическая интерпретация. *Квазилинейное* [4]) *дифференциальное уравнение в частных производных первого*

[1]) См. O. Perron, Math. Zeitschrift 27 (1928), стр. 554.

[2]) См. W. Sternberg, Sitzungsberichte Heidelberg, 1920, стр. 11.

[3]) Изложение следует книге Kamke, DGlen, стр. 330—341. [См. также литературу, указанную перед § 1. — *Прим. ред.*]

[4]) [Иногда, впрочем, уравнение типа (1) называют *почти линейным* (если функции f_ν не зависят от z) или даже просто *линейным неоднородным*; см., например, Петровский и Степанов. Термин «квазилинейное уравнение» часто используется для обозначения более широкого класса уравнений. — *Прим. ред.*]

порядка для одной неизвестной функции $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ *n независимых переменных* имеет вид (см. п. 1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = g(x_1, \ldots, x_n, z) \tag{1}$$

или, используя обозначения $p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$ и $\boldsymbol{r}$ вместо вектора с компонентами $x_1, \ldots, x_n$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z)\, p_\nu = g(\boldsymbol{r}, z). \tag{1a}$$

Очевидно, оно линейно относительно производных искомой функции, в то время как сама эта функция может входить нелинейным образом.

Дифференциальное уравнение (1) будет всегда рассматриваться лишь в такой области $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r}, z)$ $(n+1)$-мерного $\boldsymbol{r}$, z-пространства, в которой коэффициенты f_ν и g непрерывны.

Достаточно наглядная геометрическая интерпретация возможна лишь для $n = 2$. Если в этом случае записать дифференциальное уравнение типа (1) в виде

$$f(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y, z), \quad |f| + |g| > 0,$$

то каждой точке (x_0, y_0, z_0) пространства будет, в силу этого уравнения, соответствовать плоскостной элемент x_0, y_0, z_0, p, q, направляющие коэффициенты p, q которого удовлетворяют уравнению

$$f(x_0, y_0, z_0)\, p + g(x_0, y_0, z_0)\, q = h(x_0, y_0, z_0).$$

Это уравнение определяет множество плоскостей, проходящих через прямую

$$x - x_0 = f(x_0, y_0, z_0)\, t, \quad y - y_0 = g(x_0, y_0, z_0)\, t,$$
$$z - z_0 = h(x_0, y_0, z_0)\, t$$

(t — параметр), за исключением плоскости, ортогональной к плоскости x, y. В силу дифференциального уравнения, таким образом, каждой точке (x_0, y_0, z_0) будет соответствовать, как и в п. 2.1, пучок плоскостей, но общая прямая этих плоскостей теперь уже, вообще говоря, не параллельна плоскости x, y (в отличие от п. 2.1).

5.2. Характеристики и интегральные поверхности.

(a) Под *характеристическими уравнениями* квазилинейного уравнения (1) понимают систему $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu(t) &= f_\nu(\boldsymbol{r}, z), \quad \nu = 1, \ldots, n, \\ z'(t) &= g(\boldsymbol{r}, z). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(Следует заметить, что в последнем уравнении стоит g, а не $-g$.) Каждое решение этой системы

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t), \quad z = \varphi(t) \tag{3}$$

называется *характеристикой* дифференциального уравнения (1). Кривая в $\boldsymbol{r}$-пространстве, определенная первыми n уравнениями (3), называется *характеристической кривой*.

(б) Между интегралами и характеристиками уравнения (1) существует следующая связь (ср. с п. 3.2). Рассмотрим в $\mathfrak{S}_n(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируемую функцию $\chi(\boldsymbol{r})$ и точку $\boldsymbol{r}$, $z = \chi(\boldsymbol{r})$, принадлежащую $\mathfrak{S}_{n+1}$. Если через любую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$ поверхности $z = \chi(\boldsymbol{r})$ проходит по крайней мере некоторый кусок характеристики, целиком принадлежащий поверхности, если

$$\varphi(t) = \chi(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))$$

для некоторого куска характеристики (3), проходящего через $(\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n, \zeta)$, то функция $z = \chi(\boldsymbol{r})$ в $\mathfrak{S}_n$ есть интеграл уравнения (1).

5.3. Решение уравнения посредством характеристик. Согласно п. 5.2 (б), интегралы уравнения (1) являются непрерывно дифференцируемыми поверхностями, которые можно построить из характеристик. Если характеристики некоторого уравнения хорошо обозримы, то можно на основании этого попытаться уже составить представление об интегральных поверхностях.

Проиллюстрируем это несколькими примерами.

(а) $$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c,$$

где $|a| + |b| > 0$.

Характеристические уравнения

$$x'(t) = a, \quad y'(t) = b, \quad z'(t) = c$$

показывают, что характеристиками являются линии

Рис. 14.

$$x = \xi + at, \quad y = \eta + bt, \quad z = \zeta + ct$$

(t — параметр), причем ξ, η, ζ могут быть взяты произвольно. Иначе говоря, характеристики образуют семейство параллельных прямых, которые, в силу условия $|a| + |b| > 0$, не ортогональны плоскости x, y. Следовательно, интегральными поверхностями являются всевозможные непрерывно дифференцируемые цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны таким прямым[1]) (рис. 14); ср. с п. 2.4 (а).

(б) $$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

Характеристические уравнения

$$x'(t) = x - a, \quad y'(t) = y - b, \quad z'(t) = z - c$$

[1]) [То есть параллельны вектору (a, b, c). — *Прим. ред.*]

дают нам следующие характеристики:

$$x-a=C_1e^t, \qquad y-b=C_2e^t, \qquad z-c=C_3e^t$$

(где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные), т. е. характеристиками является множество лучей, выходящих из точки (a, b, c). Поэтому интегральные поверхности — всевозможные непрерывно дифференцируемые коноиды с вершиной в точке (a, b, c) (рис. 15), ср. с п. 2.4 (б).

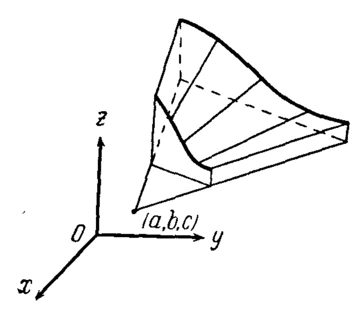


Рис. 15.

(в) $$(bz-cy)\frac{\partial z}{\partial x}+(cx-az)\frac{\partial z}{\partial y}= ay-bx, \quad |a|+|b|+|c|>0.$$

Характеристические уравнения

$$x'(t)=bz-cy, \qquad y'(t)=cx-az, \qquad z'(t)=ay-bx$$

показывают, что вдоль каждой характеристики

$$ax'+by'+cz'=0, \quad \text{или} \quad ax+by+cz=\text{const}$$

и

$$xx'+yy'+zz'=0, \quad \text{или} \quad x^2+y^2+z^2=\text{const}$$ [1]).

Следовательно, каждая характеристика принадлежит плоскости $ax+by+cz=C_1$ и одновременно шару $x^2+y^2+z^2=C_2^2$; таким образом, она представляет собой круг, лежащий в этой плоскости (который может вырождаться в точку). Интегральные поверхности представляют собой всевозможные непрерывно дифференцируемые поверхности вращения (или части таковых), оси вращения которых проходят через начало координат и ортогональны плоскости $ax+by+cz=0$ [2]) (рис. 16); ср. с п. 2.4 (в).

(г) $$(bz-cy+A)\frac{\partial z}{\partial x}+(cx-az+B)\frac{\partial z}{\partial y}=ay-bx+C.$$

Рис. 16.

Интегральные поверхности — винтовые поверхности; это показывается так же, как и в примере (в). Поскольку вычисление проще в векторной записи, то мы положим

$$\boldsymbol{v}=(a, b, c), \qquad \boldsymbol{V}=(A, B, C), \qquad \boldsymbol{r}=(x, y, z).$$

Тогда характеристические уравнения примут вид [3])

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}. \qquad (*)$$

---

[1]) Отсюда, в силу п. 5.2 (б), следует, что $z=\sqrt{C^2-x^2-y^2}$ и, если $c\neq 0$, также $z=\dfrac{C-ax-by}{c}$ — интегралы данного уравнения.

[2]) [Иначе говоря, ось вращения проходит через начало координат параллельно вектору (a, b, c). — *Прим. ред.*]

[3]) [Запись $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}$. *Прим. ред.*]

Будем считать, что особые случаи, рассмотренные в примерах (а) или (в), не имеют места (этого можно добиться, предполагая, что $v \neq 0$ и $V \neq 0$).

Надо доказать, что каждая характеристика $r = r(t)$ есть винтовая линия, ось которой параллельна вектору v и проходит через конечную точку Ω исходящего из начала координат вектора [1] $\dfrac{v \times V}{v^2}$ (рис. 17). Построим для произвольной точки $P = P(r)$ характеристики вектор

$$w = \overrightarrow{\Omega P} = r - \frac{v \times V}{v^2}.$$

Квадрат расстояния $\rho = \rho(t)$ от точки P до указанной выше оси l равен с точностью до постоянного множителя [2])

$$\rho^2 = (v \times w)^2 = \left(v \times r - v \times \frac{v \times V}{v^2}\right)^2 =$$

$$= (v \times r)^2 - 2(v \times r)\left(v \times \frac{v \times V}{v^2}\right) + \left(v \times \frac{v \times V}{v^2}\right)^2 =$$

$$= (v \times r)^2 - 2(v \times r)\frac{1}{v^2}[v(vV) - Vv^2] + \text{const} =$$

$$= (v \times r)^2 + 2(v \times r)V + \text{const} = (V + v \times r)^2 + \text{const}.$$

Рис. 17.

В силу характеристического уравнения (*), получаем:

$$\frac{d}{dt}(V + v \times r)^2 = 2(V + v \times r)(v \times r') =$$

$$= 2r'(v \times r') = 0;$$

этим непосредственно устанавливается, что величина ρ^2 постоянна вдоль любой характеристики. Таким образом, все точки характеристики равноудалены от оси l. Далее, имеем:

$$r'^2 = (V + v \times r)^2 = \text{const}$$

и

$$vr' = v(V + v \times r) = vV = \text{const}.$$

Таким образом, касательная в любой точке кривой $r(t)$ образует с вектором v постоянный угол, т. е. характеристики — винтовые линии с фиксированной осью l, параллельной вектору v и проходящей через точку Ω. Следовательно, все интегральные поверхности являются винтовыми поверхностями, которые можно построить из этих винтовых линий.

---

[1]) [Запись v^2 означает скалярный квадрат вектора v, т. е. квадрат его длины. — *Прим. ред.*]

[2]) [Как известно, модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются данные векторы. Следовательно, используя два выражения для квадрата площади параллелограмма ΩMNP (рис. 17), мы имеем:

$$(v \times w)^2 = \rho^2 v^2;$$

множитель v^2 является постоянным (не зависящим от параметра t, т. е. от выбора точки P). Используемые ниже свойства векторного и скалярного произведений векторов доказываются в любом курсе аналитической геометрии или векторной алгебры (см., например, Н. В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, «Наука», 1965; Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, 1950). Запись vV означает скалярное произведение указанных векторов. Все слагаемые, не зависящие от параметра t, включаются в член const, вид которого не имеет значения и потому не уточняется. — *Прим. ред.*]

5.4. Сведѐние квазилинейного уравнения к линейному однородному. Следуя методу п. 12.3 (а), дифференциальное уравнение (1) может быть сведено к линейному однородному дифференциальному уравнению [1])

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r},\ z)\frac{\partial w}{\partial x_\nu}+g(\boldsymbol{r},\ z)\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{4}$$

с искомой функцией $w=w(\boldsymbol{r},\ z)$. Если $w(\boldsymbol{r},\ z)$ — интеграл этого уравнения, то, разрешая уравнение $w=0$ относительно z, мы получим, при необходимых предположениях, решение уравнения (1).

Точнее, верно следующее предложение. Пусть $w=\psi(\boldsymbol{r},\ z)$ — интеграл однородного уравнения (4) в $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r},\ z)$. Далее, пусть $\chi(\boldsymbol{r})$ — функция в $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$ со следующими свойствами:

α) она непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{G}_n$;

β) точки $(\boldsymbol{r},\ z=\chi(\boldsymbol{r}))$ принадлежат области $\mathfrak{G}_{n+1}$;

γ) $\psi_z(\boldsymbol{r},\ \chi(\boldsymbol{r}))\not\equiv 0$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}_n$;

δ) функция $\psi(\boldsymbol{r},\ \chi(\boldsymbol{r}))$ постоянна в области $\mathfrak{G}_n$. Тогда $\chi(\boldsymbol{r})$ — интеграл [2]) квазилинейного уравнения (1) в области $\mathfrak{G}_n$.

Характеристическими уравнениями дифференциального уравнения (4) являются, согласно п. 3.2, характеристические уравнения (2) квазилинейного уравнения (1).

Пример. $(y+z)^2\frac{\partial z}{\partial x}-x(y+2z)\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$

Требуется найти интегральную поверхность, проходящую через кривую $z=x^2$, $y=0$.

Сначала попытаемся получить интеграл соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$(y+z)^2\frac{\partial w}{\partial x}-x(y+2z)\frac{\partial w}{\partial y}+xz\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{*}$$

Характеристические уравнения этого последнего уравнения

$$x'(t)=(y+z)^2,\qquad y'(t)=-x(y+2z),\qquad z'(t)=xz$$

нам дают соотношения:

$$(y+z)z'+(y'+z')z=0,\qquad xx'+yy'-zz'=0,$$

т. е., в силу п. 3.3, уравнение (*) имеет интегралы

$$\psi_1(x,\ y,\ z)=(y+z)z,\qquad \psi_2(x,\ y,\ z)=x^2+y^2-z^2.$$

---

[1]) Обратим внимание на то, что функция $g(\boldsymbol{r},\ z)$ написана в левой части уравнения со знаком плюс.

[2]) По вопросу, можно ли этим методом получить все интегралы уравнения (1), варьируя интегралы ψ уравнения (4), см. Kamke, DGlen, стр. 333.

Более того, они образуют интегральный базис: для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\Omega(u, v)$ выражение

$$\psi(x, y, z) = \Omega(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) \qquad (**)$$

также является интегралом уравнения (*).

Если теперь разрешить уравнение $\psi = 0$ относительно z и его решение $z = \chi(x, y)$ удовлетворяет указанным выше предположениям, то χ — интеграл исходного квазилинейного дифференциального уравнения. Этот интеграл должен при $y = 0$ иметь значение $z = x^2$, причем интеграл z должен удовлетворять уравнению $\Omega(u, v) = 0$. Следовательно, это уравнение, в частности, должно быть справедливо при

$$u = \psi_1(x, 0, x^2) = x^4, \qquad v = \psi_2(x, 0, x^2) = x^2 - x^4;$$

из этих соотношений следует: $(u + v)^2 \equiv u$. Значит, например, для $\Omega(u, v) = (u + v)^2 - u$ начальные условия выполнены и из (**) получаем:

$$\psi = (x^2 + y^2 + yz)^2 - (y + z)z.$$

Разрешая уравнение $\psi = 0$ относительно z, мы получим интеграл исходного уравнения.

5.5. Частный случай: $p + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y, z) q_\nu = g(x, y, z)$.

(а) Если по крайней мере один из коэффициентов f_ν уравнения (1) во всей рассматриваемой области не обращается в нуль, то делением на этот коэффициент мы получаем после несложных вычислений уравнение в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, \mathbf{y}, z) = \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = g(x, \mathbf{y}, z); \qquad (5)$$

здесь $\mathbf{y}$ означает вектор с компонентами $y_1, \ldots, y_n$ и $z = z(x, \mathbf{y})$ — искомая функция. Характеристическая система для уравнения (5) записывается так:

$$\left.\begin{aligned} &y'_\nu(x) = f_\nu(x, \mathbf{y}, z), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \\ &z'(x) = g(x, \mathbf{y}, z) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(здесь положено $t = x$).

(б) Имеет место следующая теорема существования для решения задачи Коши [1]). В области

$$|x - \xi| < a; \quad \mathbf{y}, \ z \text{ — произвольные} \qquad (7)$$

рассмотрим непрерывно дифференцируемые функции $f_1, \ldots, f_n, g$ с ограниченными частными производными первого порядка по y_μ и z. Пусть абсолютные величины всех этих производных ограничены в совокупности константой A. Далее, пусть $\omega(\mathbf{y})$—функция, имеющая по всем y_μ ограниченные непрерывные производные первого порядка. Пусть

---

[1]) См. Kamke, DGlen, стр. 335—340.

абсолютные величины всех этих производных ограничены в совокупности константой C. Тогда дифференциальное уравнение (5) в области

$$|x-\xi|<\min(a,\ \alpha),\ y\text{ — произвольное},$$

где

$$\alpha=\frac{1}{(n+1)A}\ln\left(1+\frac{n+1}{n(C+1)}\right),$$

имеет единственный интеграл $z=\chi(x,\ y)$ с начальным значением

$$\chi(\xi,\ y)=\omega(y).$$

Этот интеграл в параметрической записи выглядит так ($\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n$ — параметры):

$$z=\varphi(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \omega(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)),$$
$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \omega(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n;$$

здесь

$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \zeta),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n,$$
$$z=\varphi(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \zeta)$$

— интегральная кривая системы (6), проходящая через точку ($\xi,\ \eta_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \eta_n,\ \zeta$).

Если привлечь получающиеся в п. 12.2 для дифференциального уравнения (5) $2n+1$ характеристических уравнений, то нетрудно показать, что введенное выше число α можно увеличить, а именно можно положить [1]):

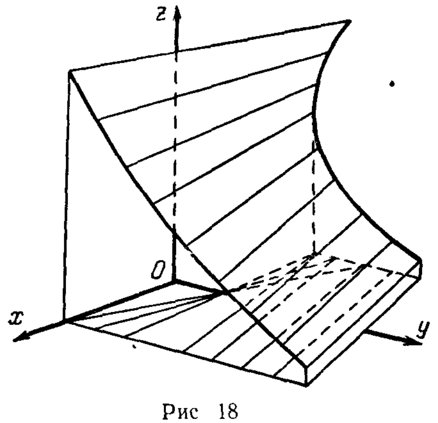


Рис 18

$$\alpha=\frac{1}{A(C+1)},\quad\text{если}\quad n=1;$$
$$\alpha=\frac{1}{(n-1)A}\ln\frac{n(C+1)}{nC+1},$$
$$\text{если}\quad n\geqslant 2.$$

Такое число α, вообще говоря, должно быть введено, хотя характеристики, как легко видеть, в предположениях теоремы существования имеются во всей области $|x-\xi|<a$. В самом деле, уже в случае $n=1$ характеристическая полоса, которая должна лежать в плоскости $x,\ y$, с удалением от точки $x=\xi$ скручивается и перестает лежать в плоскости $x,\ y$ (рис. 18).

---

[1]) См. J. Perausówna, Annales Soc. Polon. 12 (1934), стр. 1—5; T. Ważewski, Annales Soc. Polon. 12 (1934), стр. 6—15; E. Kamke, Publications de l'Institut Math. de l'Acad. Serbe. 4 (1952), стр. 61—68.

(в) Если дифференциальное уравнение (5) задано не в специальной области (7), а в некоторой более общей области $\mathfrak{G}_{n+2}(x, y, z)$, то можно, по образцу п. 3.6 (в), рассмотреть в качестве области определения коэффициентов область вида (7) или даже все x, y, z-пространство и, таким образом, с помощью (б) вывести теорему существования для подобласти области $\mathfrak{G}_{n+2}$ [1]).

(г) Пример.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Требуется найти интеграл $z(x, y)$ с начальным значением $z(0, y) = \omega(y)$ при заданной функции ω.

Характеристические уравнения $y'(x) = 1$, $z'(x) = z$ дают нам следующее выражение для характеристики, проходящей через точку (ξ, η, ζ):

$$y = \varphi_1(x, \xi, \eta, \zeta) = x - \xi + \eta,$$
$$z = \varphi(x, \xi, \eta, \zeta) = \zeta e^{x-\xi}.$$

Поэтому, в силу начальных условий,

$$y = x + \eta, \qquad z = e^x \omega(\eta)$$

— параметрическая запись искомого интеграла. Можно еще исключить параметр η: выражение

$$z = e^x \omega(y - x)$$

даст искомый интеграл, даже если для функции ω выполнены не все предположения теоремы существования.

5.6. Решение задачи Коши.

(а) Формулировка обобщенной задачи Коши для дифференциального уравнения (1) дословно такая же, как и в п. 3.7 (б) в области $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$, которая задана параметрически

$$x_\nu = u_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad \nu = 1, \ldots, n;$$

требуется найти интеграл уравнения (1), принимающий заданное значение

$$z = u(t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{8}$$

Задача разрешима при следующих предположениях [2]). Пусть коэффициенты $f_\nu(\mathfrak{r}, z)$ и $g(\mathfrak{r}, z)$ определены в области $\mathfrak{G}(\mathfrak{r}, z)$, пусть функции u_ν и u в некоторой области $H(t_1, \ldots, t_{n-1})$ непрерывно дифференцируемы. Множество точек $\mathfrak{H}(\mathfrak{r}, z)$, где $\mathfrak{r} \in \mathfrak{G}$, а z

---

[1]) См. O. Perron, Math. Zeitschrift 27 (1928), стр. 557.

[2]) См. Курант, стр. 78—83. Там же исследуется случай, когда определитель (9) обращается в нуль.

определяется по формуле (8), должно принадлежать $\mathfrak{G}$. Наконец, определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1, \ldots, u_n, u), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n, u) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial t_{n-1}}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9)$$

в области H. Через точки множества $\mathfrak{H}$ проводят характеристики

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, u), \quad \nu = 1, \ldots, n, \\ z &= \varphi(t, u_1, \ldots, u_n, u); \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

первые n из этих уравнений определяют характеристическое поле $G(H)$. Уравнения (10) — параметрическая запись искомого интеграла в каждой такой части $G(H)$, которая содержит область $\mathfrak{G}$, которая обладает тем свойством, что точка $(\mathfrak{r}, z) \in \mathfrak{G}$, и в которой разрешение первых n уравнений (10) относительно $t_1, \ldots, t_{n-1}, t$ доставляет нам параметры как непрерывно дифференцируемые функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$. В силу (9), такое разрешение заведомо возможно в достаточно малой окрестности области $\mathfrak{G}$.

(б) Для дифференциального уравнения

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x, y)}{\lambda'(z)}$$

справедливо также следующее предложение [1]).

Пусть коэффициенты f, g, h непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y)$, и пусть $|f| + |g| > 0$. Далее, пусть функции $\lambda(u)$ для $u_1 < u < u_2$ пробегает все действительные числа и имеет отличную от нуля непрерывную производную. Тогда указанное дифференциальное уравнение имеет интеграл в любой односвязной подобласти $\mathfrak{I}$ области $\mathfrak{G}$, которая не имеет в конечной части плоскости x, y общих граничных точек с $\mathfrak{G}$ и в которой функции f и g ограничены.

Для $\lambda(u) = u$, $\ln u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$ правая часть данного дифференциального уравнения соответственно равна h, zh, $h\cos^2 z$, $-h\sin^2 z$.

5.7. Разложение в ряды. Если допустить комплексные переменные, то становится справедливой следующая теорема существования [2]). Пусть в дифференциальном уравнении (5) коэффициенты $f_\nu(x, y, z)$

---

[1]) См. E. Kamke, Math. Zeitschrift **41** (1936), стр. 66; M. Cibrario, Atti Accad. Lincei (6) **13** (1931), стр. 26—31.

[2]) [Это — частный случай общей теоремы Ковалевской. См., например, Курант, стр. 50; Степанов, стр. 335; И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961, стр. 22. — *Прим. ред.*]

и $g(x, y, z)$ в некоторой окрестности точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta)$ являются регулярными функциями переменных $x, y_1, \ldots, y_n, z$, т. е. они разлагаются в этой окрестности в абсолютно сходящиеся ряды, которые, естественно, являются степенными рядами от $x-\xi$, $y_\nu-\eta_\nu$, $z-\zeta$. Кроме того, пусть $\omega(y)$—данная функция от $y_1, \ldots, y_n$, регулярная в некоторой окрестности точки $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, и пусть

$$\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n)=\zeta.$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) обладает единственным интегралом, являющимся в некоторой достаточно малой окрестности точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ регулярной функцией от $x, y_1, \ldots, y_n$, которая принимает при $x=\xi$ значение

$$z(\xi, y)=\omega(y).$$

Коэффициенты искомого степенного ряда

$$z=\sum_{\nu, \nu_1, \ldots, \nu_n} c_{\nu, \nu_1, \ldots, \nu_n}(x-\xi)^{\nu}(y_1-\eta_1)^{\nu_1} \ldots (y_n-\eta_n)^{\nu_n}$$

получаются подстановкой этого ряда в дифференциальное уравнение (5) и приравниванием соответствующих степеней с учетом начальных условий.

5.8. Методы решения. В ряде случаев можно прийти к цели методами, указанными в пп. 5.3 и 5.4. Если на этом пути не удается получить решения, то можно (в случае, если задано начальное значение интеграла) решать приближенно соответствующие характеристические уравнения и получить затем, следуя методам пп. 5.5 или 5.6, приближенное численное решение.

§ 6. Система линейных уравнений [1])

6.1. Частный случай: $p_\nu=f_\nu(r)$, $\nu=1, \ldots, n$. Простейшая система линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для одной неизвестной функции n независимых переменных имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=f_\nu(r), \qquad \nu=1, \ldots, n,$$

где снова положено r вместо вектора с компонентами $x_1, \ldots, x_n$

---

[1]) Изложение следует книгам A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1906; E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921. [См. также литературу, указанную перед § 1. — *Прим. ред.*]

и $z = z(r)$ — искомая функция. Если функции f_ν в области $\mathfrak{G}(r)$ непрерывно дифференцируемы, то каждое решение этой системы будет дважды непрерывно дифференцируемым. Тогда, поскольку [1])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu},$$

должны быть выполнены равенства

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}, \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, n$$

(*условия интегрируемости*).

Если это условие выполнено, то в каждой односвязной области $\mathfrak{G}$ исходная система разрешима и, более того, можно еще удовлетворить начальному условию: функция z в некоторой точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ области $\mathfrak{G}$ принимает значение ζ. Решение системы в этом случае выглядит так:

$$z = \zeta + \int\limits_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}^{(x_1, \ldots, x_n)} (f_1 \, dx_1 + \ldots + f_n \, dx_n),$$

причем интеграл берется по любой [2]) непрерывной спрямляемой кривой, целиком лежащей в $\mathfrak{G}$ и связывающей точки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае конкретно заданной исходной системы можно подходить к решению несколько по-иному: сначала определяют все множество функций, удовлетворяющих первому уравнению системы, затем определяют подмножество этих функций, удовлетворяющих второму уравнению, и т. д.

Пример.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1.$$

Условие интегрируемости выполнено. Из первого уравнения (считая x_2 параметром) находим $z = x_1 x_2 + \varphi(x_2)$, где φ — произвольная, гладкая функция. Далее, из второго уравнения получаем $\varphi'(x_2) = 0$. Таким образом, $z = x_1 x_2 + C$.

---

[1]) [В силу известной теоремы анализа, см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*]

[2]) [Значение этого интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек и не зависит от выбора пути интегрирования; см. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Физматгиз, 1962.— *Прим. ред.*]

6.2. Общая линейная система: определения и обозначения. (а) Общая *линейная* система имеет вид [1])

$$\sum_{k=1}^{n} f^{\mu, k}(r) \frac{\partial z}{\partial x_k} + f^{\mu, 0}(r) z = g^{\mu}(r), \qquad \mu = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

причем снова r означает вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, а $z = z(r)$ — искомая функция. Если под F^{μ} понимать оператор [2])

$$F^{\mu} = \sum_{k=1}^{n} f^{\mu, k} \frac{\partial}{\partial x_k} + f^{\mu, 0},$$

то систему уравнений (1) можно записать короче:

$$F^{\mu} z = g^{\mu}, \qquad \mu = 1, \ldots, m. \tag{1a}$$

Если система (1) может быть разрешена относительно каких-нибудь m производных, то, обозначая независимые переменные через $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_s$ $(m + s = n)$, мы можем переписать систему в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\mu}} = \sum_{k=1}^{s} f^{\mu, k}(r, y) \frac{\partial z}{\partial y_k} + f^{\mu, 0}(r, y) z + g^{\mu}(r, y) \quad \mu = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Здесь r и y обозначают соответственно векторы с компонентами $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_s$. Система (2) называется *явным* или *каноническим видом* системы линейных дифференциальных уравнений.

Интегралом системы (1) является любой интеграл, общий для всех дифференциальных уравнений системы. Множество интегралов есть, таким образом, подмножество интегралов каждого уравнения в отдельности и поэтому может быть получено (см. п. 6.7 (б)) как сужение множества интегралов отдельных уравнений.

В дальнейшем коэффициенты системы (1) или (2) будут предполагаться непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(r)$ или соответственно $\mathfrak{G}(r, y)$.

Для каждого интеграла z системы (1) имеем (при любых μ и ν):

$$F^{\nu}(F^{\mu} z - g^{\mu}) - F^{\mu}(F^{\nu} z - g^{\nu}) = 0 \tag{3}$$

---

[1]) В параграфах, посвященных системам уравнений, целесообразно функции снабжать индексами вверху, в то время как внизу ставится переменная, по которой производится дифференцирование; например, $f^{\mu, k}_{x_\rho} = \dfrac{\partial f^{\mu, k}}{\partial x_\rho}$.

[2]) Очевидно, что $F^{\mu}(u, v) = vF^{\mu}u + uF^{\mu}v - f^{\mu, 0}uv$.

(так как в скобках, в силу (1а), стоят нули). Отметим, что любая дважды непрерывно дифференцируемая функция z после применения к ней оператора F^{μ} превращается в непрерывно дифференцируемую (один раз) функцию. Уравнения (3) после выполнения необходимых (см. (1)) операций снова приобретают вид (1)

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(f_{x_k}^{\mu\rho}f^{\nu k}-f_{x_k}^{\nu\rho}f^{\mu k}\right)\frac{\partial z}{\partial x_\rho}+\left(f_{x_\rho}^{\mu 0}f^{\nu\rho}-f_{x_\rho}^{\nu 0}f^{\mu\rho}\right)z\right\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(g_{x_k}^{\mu}f^{\nu k}-g_{x_k}^{\nu}f^{\mu k}\right)+g^{\mu}f^{\nu 0}-g^{\nu}f^{\mu 0}. \qquad (4)$$

Мы будем говорить, что уравнение (4) *получено при помощи образования* $[\mu, \nu]$*-скобок*[1]) из μ-го и ν-го уравнений системы (1).

(б) Имеет место следующий фундаментальный факт[2]): каждый интеграл системы (1) должен также удовлетворять уравнениям (4) для $1\leqslant\mu,\ \nu\leqslant m$.

Для системы (2) уравнения (4) имеют вид

$$\sum_{\rho=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{s}\left(f_{y_k}^{\mu\rho}f^{\nu k}-f_{y_k}^{\nu\rho}f^{\mu k}\right)-f_{x_\nu}^{\mu\rho}+f_{x_\mu}^{\nu\rho}\right\}\frac{\partial z}{\partial y_\rho}+$$
$$+\left\{\sum_{k=1}^{s}\left(f_{y_k}^{\mu 0}f^{\nu k}-f_{y_k}^{\nu 0}f^{\mu k}\right)-f_{x_\nu}^{\mu 0}+f_{x_\mu}^{\nu 0}\right\}z+$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\left(g_{y_k}^{\mu}f^{\nu k}-g_{y_k}^{\nu}f^{\mu k}\right)-g_{x_\nu}^{\mu}+g_{x_\mu}^{\nu}+g^{\mu}f^{\nu 0}-g^{\nu}f^{\mu 0}=0. \qquad (5)$$

6.3. Инволюционные системы и полные системы.

(а) Система (1) называется *инволюционной*, если соответствующие ей уравнения (4) удовлетворяются для всех непрерывно дифференци-

---

[1]) Так как уравнения, получаемые при помощи образования $[\mu, \nu]$-скобок и $[\nu, \mu]$-скобок, отличаются лишь знаком, а уравнение, получаемое при помощи образования $[\mu, \mu]$-скобок, есть тождество $0=0$, то уравнения (4) имеет смысл рассматривать для $1\leqslant\mu<\nu\leqslant m$. Отметим, что уравнения (4) не являются частным случаем уравнений § 14, (14); в то же время приводимые ниже уравнения (5) есть частный случай уравнений § 14, (2). Примеры см. в ч. II, 5.6 и II, 5.11.

[2]) Этот факт верен не только для дважды непрерывно дифференцируемых функций z, но и для функций, лишь один раз непрерывно дифференцируемых. См. E. Schmidt, Monatshefte f. Math. **48** (1939), стр. 426—432; O. Perron, Math. Annalen **117** (1941), стр. 687—693; A. Ostrowski, Commentarii math. Helvetici **15** (1942), стр. 217—221.

руемых функций z, т. е. если коэффициенты системы (1) удовлетворяют так называемым *условиям интегрируемости*:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(f^{\mu\rho}_{x_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{x_k}f^{\mu k}\right)=0, \quad \mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m; \quad \rho=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\\ &\sum_{k=1}^{n}\left(g^{\mu}_{x_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{x_k}f^{\mu k}\right)=f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu}, \quad \mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В частности, система (2) инволюционна, если выполнены ее условия интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{s}\left(f^{\mu\rho}_{y_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{y_k}f^{\mu k}\right)=f^{\mu\rho}_{x_\nu}-f^{\nu\rho}_{x_\mu}, \quad \mu,\nu=1,\ \ldots,\ m; \ \rho=0,\ \ldots,s,\\ &\sum_{k=1}^{s}\left(g^{\mu}_{y_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{y_k}f^{\mu k}\right)=g^{\mu}_{x_\nu}-g^{\nu}_{x_\mu}+f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu}, \mu,\nu=1,\ \ldots,\ m.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Система (2) в этом случае называется также *якобиевой системой*.

(б) Система (1) называется *полной*, если каждое из соответствующих ей уравнений (4) для любой функции z является лишь линейной комбинацией уравнений самой системы (1), т. е. если для произвольной непрерывно дифференцируемой функции z

$$F^{\mu}\left(F^{\nu}z-g^{\nu}\right)-F^{\nu}\left(F^{\mu}z-g^{\mu}\right)\equiv\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(\boldsymbol{r})\left(F^{k}z-g^{k}\right)$$

с подходяще подобранными (не зависящими от μ и ν) функциями $\lambda_k(\boldsymbol{r})$.

(в) Для решения системы (1) ее преобразуют следующим образом в полную систему.

Если какое-либо из уравнений (1) в $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ для произвольной непрерывно дифференцируемой функции z является линейной комбинацией остальных, например,

$$F^{\mu}z-g^{\mu}=\sum_{\rho\neq\mu}\lambda_{\rho}(\boldsymbol{r})\left(F^{\rho}z-g^{\rho}\right)$$

для некоторых функций $\lambda_{\rho}(\boldsymbol{r})$, то это уравнение можно опустить. В этом случае система (1) сводится к системе с меньшим числом

(линейно-независимых) уравнений, которую мы будем называть приведенной [1]).

В силу п. 6.2 (б), каждое решение системы (1) должно удовлетворять уравнениям (4). Поэтому систему (1) можно дополнить теми из уравнений (4), которые не являются линейными комбинациями уравнений (1). Получается снова система вида (1), но уже с m_1 уравнениями. Если $m_1 > m$, то к полученной системе снова применяют описанные рассуждения (коэффициенты системы (1) предполагаются достаточно гладкими) и т. д. Если после конечного числа шагов мы уже не встретим новых уравнений [2]), то полученная система будет полной. Эту систему, согласно 6.5 (в), можно преобразовать в инволюционную. Примеры см. в ч. II, гл. 5.

Необходимое условие разрешимости полученной полной и, таким образом, первоначальной системы состоит во всяком случае в том, чтобы она, рассматриваемая как алгебраическая система уравнений для величин $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, была разрешима. Если при этом разрешении все z_{x_ν} оказываются равны нулю, то система не имеет никаких решений, кроме тривиальных $z = \text{const}$.

6.4. Метод Майера для решения якобиевой системы. Пусть в области

$$a_\rho \leqslant x_\rho \leqslant b_\rho, \quad \rho = 1, \ldots, m\,^{3)}, \quad y \text{ произвольно} \tag{8}$$

---

[1]) В литературе (см., например, E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre Paris, 1921; C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin, 1935) встречается утверждение, что каждая приведенная система состоит не более чем из $n+2$ уравнений, причем об области, для которой должно быть верно это утверждение, ничего не говорится. В доказательстве обычно утверждается, что если какие-нибудь $n+3$ уравнения охватываются матрицей коэффициентов

$$(f^{\mu 0}, f^{\mu 1}, \ldots, f^{\mu n}, g^{\mu}) \quad \mu = 1, \ldots, n+3$$

с числом строк, превышающим число столбцов, то некоторые строки получаются из других линейной комбинацией и, таким образом, для $m \geqslant n+3$ некоторые строки системы (1) могут быть вычеркнуты. Что для каждой фиксированной точки r_0 в этом случае некоторые строки есть линейные комбинации других, конечно, верно, но неверно, что это имеет место для тех же строк во всей области $\mathfrak{G}(r)$ или хотя бы лишь в достаточно малой окрестности фиксированной, но, вообще говоря, произвольной точки r_0. Последнее, однако, становится верным, если матрица имеет в точке r_0 ранг, наивысший среди рангов в некоторой окрестности точки r_0.

[2]) В литературе (см. книги, указанные в сноске [1])) встречается утверждение, что этот случай всегда наступает и что приведенная полная система состоит всегда из $n+2$ уравнений. Это заблуждение покоится на том же ошибочном заключении, которое было разъяснено в примечании [1]).

[3]) В этом неравенстве один или оба знака равенства могут быть опущены; случаи $a_\rho = -\infty$, $b_\rho = +\infty$ не исключаются.

коэффициенты $f^{\mu k}$, $k \geqslant 1$, системы (2) ограничены [1]), все $f^{\mu k}$ и g^{μ} непрерывно дифференцируемы, и пусть условия интегрируемости (7) выполнены (т. е. система (2) является якобиевой; см. п. 6.3 (а)). Далее, пусть задана функция $\omega(\mathfrak{y})$, непрерывно дифференцируемая по любому y_μ. Тогда якобиева система (2) в области (8) имеет единственный интеграл $z = \psi(\mathfrak{r}, \mathfrak{y})$, удовлетворяющий начальному условию

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_m, \mathfrak{y}) = \omega(\mathfrak{y})$$

для произвольных ξ_ρ, удовлетворяющих условию $a_\rho \leqslant \xi_\rho \leqslant b_\rho$, $\rho = 1, \ldots, m$ [2]).

Доказать это проще всего применением метода Майера. При этом методе независимые переменные x_ρ представляются как функции от $m+1$ аргументов $u, u_1, \ldots, u_m$, а именно:

$$x_\rho = \xi_\rho + u u_\rho, \qquad \rho = 1, \ldots, m \tag{9}$$

(*преобразование Майера*). Тогда из системы (2) для функции $\mathfrak{Z}(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}) = z(\mathfrak{r}, \mathfrak{y})$ получаем уравнение

$$\mathfrak{Z}_u = \sum_{k=1}^{s} \mathcal{F}^k \mathfrak{Z}_{y_k} + \mathcal{F}^0 \mathfrak{Z} + \mathcal{G}, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{F}^k = \sum_{\rho=1}^{r} u_\rho f^{\rho k}, \quad k = 0, 1, \ldots, s, \qquad \mathcal{G} = \sum_{\rho=1}^{r} u_\rho g^\rho,$$

а из начальных условий для z следует, что

$$\mathfrak{Z}(0, u_1, \ldots, u_m, \mathfrak{y}) = \omega(\mathfrak{y}). \tag{11}$$

Уравнение (10) является линейным дифференциальным уравнением для $\mathfrak{Z}$, причем u, $\mathfrak{y}$ выступают в качестве независимых переменных, а $u_1, \ldots, u_m$ — как параметры. Для решения задачи (10), (11) применяются методы из § 4. Если найдено непрерывно дифференцируемое по всем $r+s+1$ аргументам решение $\mathfrak{Z}$ задачи (10), (11), то

$$z(\mathfrak{r}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{Z}(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \mathfrak{y})$$

является искомым решением системы (2).

Таким образом, якобиева система (2) преобразованием Майера однозначно сводится к одному линейному дифференциальному

---

[1]) Это предположение может быть заменено также требованием ограниченности всех производных $f^{\mu k}_{y_\rho}$ для $k \geqslant 1$.

[2]) Более общую теорему см. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 275.

уравнению. Теоретически этот метод очень удобен, при решении же конкретных задач можно поступать и по-другому.

Пример. $\frac{\partial z}{\partial x_1} = z + \frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = z + \frac{\partial z}{\partial y}$; искомая функция $z = z(x_1, x_2, y)$. Данная система инволюционна.

Для $\mathfrak{Z}(u, u_1, u_2, y)$ получается линейное дифференциальное уравнение

$$\mathfrak{Z}_u = (u_1 + u_2)(\mathfrak{Z}_y + \mathfrak{Z}). \qquad (*)$$

Соответствующим трехчленным линейным однородным уравнением для $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u, y, \mathfrak{Z})$ (см. пп. 4.2 или 5.4) является уравнение

$$\mathcal{W}_u - (u_1 + u_2)\mathcal{W}_y + (u_1 + u_2)\mathfrak{Z}\mathcal{W}_{\mathfrak{Z}} = 0.$$

Для него функции

$$\mathfrak{Z}e^y, \quad (u_1 + u_2)u + y$$

образуют интегральный базис, и таким образом, решениями будут являться функции

$$\mathcal{W} = \mathfrak{Z}e^y - \Omega[(u_1 + u_2)u + y]$$

(где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция). Далее, для уравнения (*) решениями служат функции

$$\mathfrak{Z} = e^{-y}\Omega[(u_1 + u_2)u + y].$$

Наконец, для исходной системы получаем интегралы

$$z = e^{-y}\Omega(x_1 + x_2 + y)$$

в случае, когда выбраны $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

6.5. Свойства полной системы[1].

(а) Каждая полная система (1) (см. п. 6.3 (б)) преобразованием

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(y_1, \ldots, y_n), \quad y_\nu = \chi_\nu(x_1, \ldots, x_n), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

переводится снова в полную систему, если функции χ_ν дважды непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(r)$, эта область взаимно однозначно переводится в некоторую область $y_1, \ldots, y_n$-пространства, и если

$$\frac{\partial(\chi_1, \ldots, \chi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Если система (1) была инволюционной, то получающаяся после указанного преобразования система также будет инволюционной.

(б) Каждая система, алгебраически эквивалентная полной системе, является полной. Точнее, пусть (1) — полная система, и пусть функ-

[1]) Результаты, приводимые здесь, можно найти в книгах: A. R. Forsyth, Theory of Differential Equation, Cambridge, 1906; E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921.

ции $A_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, m$) непрерывно дифференцируемы в $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ и $\det|A_{\mu\nu}| \neq 0$. Тогда если определить операторы и функции

$$G^\mu = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} F^k \quad \text{и} \quad h^\mu(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} g^k(\boldsymbol{r}), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

то система

$$G^\mu z = h^\mu(\boldsymbol{r}), \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

— полная.

(в) Пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ задана полная система (1), причем $m \leqslant n$. Если во всей области $\mathfrak{G}$ некоторый фиксированный минор порядка m матрицы коэффициентов

$$\left(f^{\mu\nu}\right) \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n)$$

отличен от нуля, например,

$$\det\left|f^{\mu\nu}\right| \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m),$$

то система (1) относительно $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$ однозначно разрешима и в этом разрешенном виде инволюционна.

6.6. Однородные системы. Система (1) называется *однородной* системой, если все $f^{\mu 0} = 0$ и все $g^\mu = 0$, т. е. если система имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

При этом о коэффициентах $f^{\mu\nu}$ пока предполагается, что они все в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ непрерывны.

(а) Если $\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^k(\boldsymbol{r})$ — интегралы уравнения (12), то для произвольной дифференцируемой функции $\Omega(u_1, \ldots, u_k)$, определенной для значений ψ^μ, сложная функция $\Omega\left(\psi^1, \ldots, \psi^k\right)$ является интегралом уравнения (12).

(б) Если $m < n$ и ранг матрицы коэффициентов $\left(f^{\mu\nu}\right)$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не меньше m, то для любых $n - m + 1$ интегралов $\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^{n-m+1}(\boldsymbol{r})$ системы (12) все определители порядка $n - m + 1$ матрицы

$$\frac{\partial\left(\psi^1, \ldots, \psi^{n-m+1}\right)}{\partial\left(x_1, \ldots, x_n\right)}$$

обращаются в области $\mathfrak{G}$ в нуль.

(в) Если $m < n$ и матрица коэффициентов $\left(f^{\mu\nu}\right)$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не имеет ранг, меньший m, то $n - m$ интегралов

$\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^{n-m}(\boldsymbol{r})$ системы (12) называются *интегральным базисом* (*фундаментальной системой интегралов*) системы (12) в том случае, если функциональная матрица

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^{n-m})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не имеет ранг, меньший $n-m$.

(г) Если система (12) имеет в области $\mathfrak{G}$ интегральный базис $\psi^1, \ldots, \psi^{n-m}$, то существует множество интегралов этой системы, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций $\psi(\boldsymbol{r})$, для которых матрица

$$\frac{\partial(\psi, \psi^1, \ldots, \psi^{n-m})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

всюду в области $\mathfrak{G}$ имеет ранг, не превосходящий $n-m$.

(д) Для однородной якобиевой системы (2) $\left(\text{т. е. } f^{\mu 0} = g^{\mu} = 0\right)$ в предположениях п. 6.4 в области (8) существует интегральный базис $\psi^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ldots, \psi^s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, т. е. функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^s)}{\partial(y_1, \ldots, y_s)} \neq 0. \tag{13}$$

(е) Пусть задана однородная якобиевая система (2) $\left(\text{т. е. } f^{\mu 0} = g^{\mu} = 0\right)$ в предположениях п. 6.4. Если $\psi^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ldots, \psi^s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — k раз непрерывно дифференцируемый интегральный базис, так что справедливо неравенство (13), и уравнения

$$\eta_\nu = \psi^\nu(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{y}), \qquad \nu = 1, \ldots, s, \tag{14}$$

однозначно разрешимы относительно $y_\varkappa$ для фиксированного $\boldsymbol{r}_0(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ и для произвольных η_ν, то множество k раз непрерывно дифференцируемых интегралов $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ этой системы дается формулой

$$\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \Omega(\psi^1, \ldots, \psi^s),$$

где $\Omega(u_1, \ldots, u_s)$ пробегает все k раз непрерывно дифференцируемые функции, определенные для значений ψ^ν. Предположение о разрешимости уравнений (14) выполнено, в частности, если $\psi^\nu(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{y}) = y_\nu$; этот интеграл в данном случае называется также *главным интегралом*.

6.7. Редукция однородной системы.

(а) Пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ для данной однородной системы (12) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $f^{\mu\nu}$ известно h частных интегралов $\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^h(\boldsymbol{r})$, для которых

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^h)}{\partial(x_1, \ldots, x_h)} \neq 0.$$

Можно пытаться упростить эту систему посредством введения новых независимых переменных

$$y_1 = \psi^1(\mathbf{r}), \ \ldots, \ y_h = \psi^h(\mathbf{r}), \quad y_{h+1} = x_{h+1}, \ \ldots, \ y_n = x_n. \tag{15}$$

Преобразованием (15) область $\mathfrak{G}(\mathbf{r})$ взаимно однозначно отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(\mathbf{r})$; при этом функции $f^{\mu\nu}(\mathbf{r})$ переходят в функции $\bar{f}^{\mu\nu}(\mathbf{y})$. Тогда решениями системы (12) являются непрерывно дифференцируемые функции $z(\mathbf{y}) = \zeta(\mathbf{y})$, удовлетворяющие системе

$$\sum_{\nu=h+1}^{n} \bar{f}^{\mu\nu}(\mathbf{y}) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\nu} = 0, \qquad \mu = 1, \ \ldots, \ m, \tag{16}$$

в которой $y_1, \ \ldots, \ y_h$ рассматриваются как параметры.

Если система (12) — полная или инволюционная, то то же самое верно для системы (16) в случае, если функции ψ^ν дважды непрерывно дифференцируемы.

Пример. $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0$,

$$x_1p_1 + x_2p_2 - (x_1 + x_2)\,p_3 + x_4p_4 = 0.$$

Система полная. Функция $\psi = x_1 + x_2 + x_3$ есть, очевидно, интеграл. После замены переменных

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4), \quad y_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4$$

приходим к системе

$$\zeta_{y_2} - 2\zeta_{y_3} = 0, \quad y_2\zeta_{y_2} + (y_3 - y_1)\,\zeta_{y_3} + y_4\zeta_{y_4} = 0$$

и для нее находим (например, согласно (б)) интеграл $\dfrac{2y_2 + y_3 - y_1}{y_4}$. Таким образом, для первоначальной системы получен интегральный базис

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad \frac{x_2 - x_1}{x_4}.$$

(б) Пусть для какого-нибудь из дифференциальных уравнений (12), например для m-го, известен интегральный базис $\psi^1(\mathbf{r}), \ \ldots, \ \psi^{n-1}(\mathbf{r})$. Тогда интегралом этого же уравнения будет также функция $\zeta(\psi^1, \ \ldots, \ \psi^{n-1})$ при произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\zeta(y_1, \ \ldots, \ y_{n-1})$. Можно попытаться так сузить множество таких функций ζ, чтобы выражения $\zeta(\psi^1, \ \ldots, \ \psi^{n-1})$ удовлетворяли также остальным уравнениям системы (12). С этой целью подставляют $z(\mathbf{r}) = \zeta(y_1, \ \ldots, \ y_{n-1})$ с $y_\nu = \psi^\nu(\mathbf{r})$ в систему (12) и исследуют получающуюся таким образом систему дифференциальных уравнений для $\zeta(y_1, \ \ldots, \ y_{n-1})$.

Более точно, имеет место следующий факт. Пусть в области $\mathfrak{G}(\mathbf{r})$ задана инволюционная система (12), коэффициенты которой

непрерывно дифференцируемы. Пусть, например, для m-го уравнения дважды непрерывно дифференцируемые функции $\psi^1(\mathbf{r}), \ldots, \psi^{n-1}(\mathbf{r})$ образуют интегральный базис:

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Посредством преобразования переменных

$$y_1 = \psi^1(\mathbf{r}), \ \ldots, \ y_{n-1} = \psi^{n-1}(\mathbf{r}), \quad y_n = x_n \tag{17}$$

область $\mathfrak{G}(\mathbf{r})$ отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(y_1, \ldots, y_n)$; при этом вместе с любыми двумя точками $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ и $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^*)$ к области $\mathfrak{G}$ принадлежит также и соединяющая их кривая[1]). Наконец, пусть ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ коэффициенты f^{mn} не обращаются тождественно в нуль. Тогда интегралами системы (12) являются функции $z(\mathbf{r}) = \zeta(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})$, где $\zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$ — решения системы

$$\sum_{k=1}^{n-1} g^{\mu k} \frac{\partial \zeta}{\partial y_k} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m-1, \tag{18}$$

причем

$$g^{\mu k} = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu} \psi^k_{x_\nu}, \quad \mu = 1, \ldots, m-1; \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

и эти функции, после подстановки (17), зависят лишь от $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Система (18), таким образом, снова инволюционна. В качестве примера см. ч. II, 5.2.

(в) Пусть известен интеграл какого-нибудь из уравнений системы (12). Тогда можно попытаться найти, согласно п. 3.5, интегральный базис для этого уравнения и далее применить метод (б). Другой возможный метод решения принадлежит Якоби.

Пусть система (12), записанная в сокращенном виде (см. (1а))

$$F^\mu z = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

с оператором

$$F^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

инволюционна, т. е. равенство

$$F^\rho F^\sigma z = F^\sigma F^\rho z \qquad (1 \leqslant \sigma, \ \rho \leqslant m) \tag{20}$$

[1]) Если это не так, то область $\mathfrak{G}$ следует соответствующим образом уменьшить.

справедливо для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $z(\boldsymbol{r})$. Далее, пусть $\psi^1(\boldsymbol{r})$ — достаточное число раз дифференцируемый[1]) интеграл первого из уравнений (19).

Попытаемся теперь по *методу Якоби*[2]) получить общее решение двух первых уравнений системы (19), затем общее решение первых трех уравнений этой системы и т. д. до получения общего решения системы (19). В силу условий интегрируемости (20), имеем: $F^1F^2\psi^1 = F^2F^1\psi^1 = 0$, так как по предположению $F^1\psi^1 = 0$. Поэтому функция $\psi^2 = F^2\psi^1$ также удовлетворяет первому из уравнений системы (19). Соответственно устанавливается, что аналогично конструируемые функции

$$\psi^3 = F^2\psi^2, \quad \psi^4 = F^2\psi^3, \ \ldots$$

все удовлетворяют первому из уравнений системы (19). На основании п. 6.6 (б) и (е) можно заключить, что найдется такое число $j \leqslant n-1$, что функция ψ^{j+1} представляется как непрерывно дифференцируемая функция от $\psi^1, \ldots, \psi^j$, т. е.

$$\psi^{j+1}(\boldsymbol{r}) = U(\psi^1, \ \ldots, \ \psi^j), \tag{21}$$

причем

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^j)}{\partial(x_1, \ldots, x_j)} \neq 0.$$

Теперь так определим непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi(y_1, \ \ldots, \ y_j)$, чтобы сложная функция

$$\chi(\boldsymbol{r}) = \Psi(\psi^1, \ \ldots, \ \psi^j) \tag{22}$$

удовлетворяла второму из уравнений (19)[3]), т. е. чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{2,\nu} \sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} \psi^\rho_{x_\nu} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} F^2 \psi^\rho = 0,$$

или, в силу определения ψ^ρ, в виде

$$\sum_{\rho=1}^{j} \psi^{\rho+1} \Psi_{y_\rho} = 0;$$

---

[1]) Получить более точную формулировку предположений, при которых описываемый метод ведет к цели, можно без труда.

[2]) См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921, стр. 77—81.

[3]) Функция $\chi(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет первому из уравнений (19), в силу 6.6 (а).

наконец, в силу (21), имеем окончательно:

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} \psi^{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(\psi^1, \ldots, \psi^j)\Psi_{y_j} = 0.$$

Если положить

$$\psi^1(r) = y_1, \ldots, \psi^j(r) = y_j,$$

то это уравнение приобретает вид

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} y_{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(y_1, \ldots, y_j)\Psi_{y_j} = 0.$$

Если найдено нетривиальное решение $\Psi(y_1, \ldots, y_j)$ этого линейного однородного уравнения[1]), то функция (22) является общим решением двух первых уравнений системы (19).

Теперь попытаемся, зная функцию χ, получить общее решение трех первых уравнений системы (19). Как и ранее, первые шаги следуют из соотношений (20): функции

$$\chi^1 = \chi, \quad \chi^2 = F^3\chi^1, \quad \chi^3 = F^3\chi^2, \ldots$$

удовлетворяют одновременно двум первым уравнениям системы (19). Пусть k — такое наименьшее число, что

$$\chi^{k+1} = V(\chi^1, \ldots, \chi^k)$$

— непрерывно дифференцируемая функция первых k интегралов χ^ρ. Найдем функцию $\Phi(y_1, \ldots, y_k)$ такую, что $\Phi(\chi^1(r), \ldots, \chi^k(r))$ удовлетворяет также третьему уравнению системы (19). Для Φ получим снова некоторое однородное линейное дифференциальное уравнение, и т. д.

Если процесс преждевременно не оборвется, получают, наконец, нетривиальное решение системы (19). Этот метод громоздок, но все же во многих случаях бывает полезен, например, когда известно лишь некоторое частное решение системы (12).

Пример. Пусть дана инволюционная система

$$p_3 + x_1p_4 = 0, \quad p_2 + x_2p_4 = 0, \quad p_1 + (3x_1^2 + x_3)p_4 = 0.$$

Непосредственно видно, что функция $\psi^1 = x_1x_3 - x_4$ является решением первого уравнения. Далее, имеем:

$$\psi^2 = F^2\psi^1 = -x_2, \qquad \psi^3 = F^2\psi^2 = -1;$$

---

[1]) Его характеристическая система

$$y_1'(t) = y_2, \quad y_2'(t) = y_3, \ldots, y_{j-1}'(t) = y_j, \quad y_j'(t) = U(y_1, \ldots, y_j)$$

эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y_1^{(j)}(t) = U(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(j-1)}).$$

следовательно, $j=2$, $U=-1$. Тем самым для функции $\Psi(y_1, y_2)$ получено дифференциальное уравнение $y_2\Psi_{y_1}-\Psi_{y_2}=0$ с решением $\Psi=2y_1+y_2^2$. Поэтому общим решением двух первых уравнений будет

$$\chi=\chi^1=2(x_1x_3-x_4)+x_2^2.$$

Далее, находим:

$$\chi^2=F^3\chi^1=-6x_1^2, \qquad \chi^3=F^3\chi^2=-12x_1=-\sqrt{-24\chi^2};$$

поэтому $k=2$, $\chi^3=V(\chi^1, \chi^2)=-\sqrt{-24\chi^2}$, а для Φ получается дифференциальное уравнение

$$y_2\Phi_{y_1}-\sqrt{-24y_2}\,\Phi_{y_2}=0$$

с решением

$$\Phi(y_1, y_2)=y_1+\frac{1}{3\sqrt{6}}(-y_2)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид $\Phi(\chi^1, \chi^2)$, т. е.

$$2(x_1x_3-x_4)+x_2^2+2x_1^3.$$

6.8. Редукция общей системы. Пусть общая линейная система (1) имеет в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируемые коэффициенты, и пусть она там полная (см. п. 6.3 (б)). Пусть для соответствующей линейной однородной системы (12), которая также полна, известен интегральный базис $\psi^{m+1}(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^n(\boldsymbol{r})$:

$$\frac{\partial(\psi^{m+1}, \ldots, \psi^n)}{\partial(x_{m+1}, \ldots, x_n)}\neq 0.$$

Пусть область $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ преобразованием

$$y_1=x_1, \ \ldots, \ y_m=x_m, \quad y_{m+1}=\psi^{m+1}(\boldsymbol{r}), \ \ldots, \ y_n=\psi^n(\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

взаимно однозначно отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{y})$. Наконец, пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$

$$\det|f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r})|\neq 0 \qquad (\mu, \nu=1, \ldots, m). \tag{24}$$

Тогда интегралы системы (1), будучи непрерывно дифференцируемыми функциями $z(\boldsymbol{r})=\zeta(\boldsymbol{y})$, удовлетворяют системе

$$\sum_{\nu=1}^{m} g^{\mu\nu}(\boldsymbol{y})\frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu}+g^{\mu 0}(\boldsymbol{y})\zeta=h^\mu(\boldsymbol{y}), \quad \mu=1, \ldots, m. \tag{25}$$

Здесь $g^{\mu\nu}$, h^μ — функции, полученные из $f^{\mu\nu}$ и g^μ соответственно заменой переменных (23). Система (25) в случае, если ψ^μ дважды непрерывно дифференцируемы, в силу 6.5 (а), снова полна и может быть записана, согласно (24), в форме

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y_\mu}=\gamma^\mu(\boldsymbol{y})\zeta+\delta^\mu(\boldsymbol{y}), \qquad \mu=1, \ldots, m.$$

В силу 6.5 (в), эта последняя система инволюционна. Если все $\gamma^\mu = 0$, то получается

$$\zeta = \int \sum_{\mu=1}^{m} \delta^\mu (y)\, dy_\mu + \Omega (y_{m+1}, \ldots, y_n),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

6.9. Методы решения. Если задана система (1), то прежде всего надо установить, полна ли она. Если это не так, то ее дополняют, согласно п. 6.3 (в), до некоторой полной системы. Затем решают соответствующую однородную систему. Для этого в нашем распоряжении имеются методы п. 6.6 или метод Майера (см. п. 6.4). Этот последний особенно полезен тогда, когда требуется найти решение с заданным начальным условием. Если данная система не однородна, то можно, согласно п. 6.8, использовать решение однородной системы.

§ 7. Система квазилинейных уравнений

7.1. Частный случай.

(а) Пусть для функции $z = z(\boldsymbol{r})$ дана система

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f^\nu (\boldsymbol{r}, z), \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ снова обозначает набор $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты f^ν предполагаются в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z)$ непрерывно дифференцируемыми[1]). Тогда каждый интеграл (1) дважды непрерывно дифференцируем, а потому имеется соотношение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \partial x_\mu}, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

Отсюда вытекает, принимая во внимание уравнения (1), что для каждого интеграла z системы (1) справедливы равенства

$$f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu = f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu, \qquad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n. \tag{2}$$

---

[1]) Система (1) иногда записывается также в виде одного дифференциального уравнения

$$dz = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu (\boldsymbol{r}, z)\, dx_\nu.$$

Однако следует иметь в виду, что это уравнение обычно понимают как сокращенную запись уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu (\boldsymbol{r}, z) \frac{dx_\nu}{dt},$$

для которого требуется определить функции $z(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$, удовлетворяющие этому уравнению.

Если эти равенства выполняются тождественно относительно $\boldsymbol{r}$ и z, то (1) называется *инволюционной системой*. Равенства (2) называются *условиями интегрируемости* системы (1).

Если функции f^ν в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| < a \leqslant \infty \quad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad |z - \zeta| < b \leqslant \infty,$$

где $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$ — фиксированная точка, непрерывно дифференцируемы и ограничены, например $|f^\nu| \leqslant A$, и если выполнены условия интегрируемости (2), то система (1) в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| < \alpha \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{nA}\right),$$

имеет интеграл $z = \psi(\boldsymbol{r})$ с начальным значением

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \zeta \text{ [1]}. \tag{1a}$$

(б) Интеграл этот может быть построен, например, *последовательным решением уравнений*. Для этого сначала рассматривают первое из уравчений (1) в специальной форме

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f^1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, z)$$

с начальным условием

$$z(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \zeta.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение; пусть его решение $z = \varphi^1(x_1)$ найдено. Второй шаг состоит в решении уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f^2(x_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, z)$$

с начальным условием

$$z(x_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = \varphi^1(x_1),$$

причем теперь x_1 рассматривается как параметр. Это снова обыкновенное дифференциальное уравнение; пусть $z = \varphi^2(x_1, x_2)$ — его решение. На следующем шаге решается задача

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = f^3(x_1, x_2, x_3, \xi_4, \ldots, \xi_n, z),$$
$$z(x_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = \varphi^2(x_1, x_2),$$

---

[1]) См. A. J. Macintyre, Proceedings Edinburgh math. Soc. (2) **4** (1935), стр. 112—117; L. Bruwier, Bulletin Liège **8** (1939), стр. 105—116; T. Y. Thomas, Annals of Math. **35** (1934), стр. 730—734; W. Mayer, T. Y. Thomas, Math. Zeitschrift **40** (1936), стр. 658—661; P. Gillis, Bulletin Liège **9** (1940), стр. 197—212; W. Wirtinger, Monatschefte f. Math. **34** (1926), стр. 81—88.

причем x_1, x_2 рассматриваются как параметры, и т. д. Последним шагом является решение задачи

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f^n(x_1, \ldots, x_n, z),$$

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) = \varphi^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — параметры. Ее решение $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ является, как устанавливается с помощью условий интегрируемости, искомым интегралом системы (1).

(в) Интеграл системы (1), удовлетворяющий условию (1а), можно искать, следуя *методу Майера* (см. п. 6.4). Если положить

$$\mathfrak{Z}(u, u_1, \ldots, u_n) = z(\mathbf{r});$$

$$x_\nu = \xi_\nu + u u_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

то из системы (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu f^\nu, \tag{3}$$

а из начальных условий следует, что

$$\mathfrak{Z}(0, u_1, \ldots, u_n) = \zeta. \tag{4}$$

Уравнение (3) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с параметрами $u_1, \ldots, u_n$. Если $\mathfrak{Z}$ — его решение, удовлетворяющее начальному условию (4), то

$$z = \mathfrak{Z}(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$$

— искомый интеграл системы (1).

7.2. Общая квазилинейная система. Она имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\mathbf{r}, z) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = g^\mu(\mathbf{r}, z), \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

и является частным случаем теории § 14. Следовательно, справедливо приведенное там утверждение. Преобразованием, указанным в п. 12.3 (а), система (5) может быть приведена к однородной системе

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\mathbf{r}, z) \frac{\partial w}{\partial x_\nu} + g^\mu(\mathbf{r}, z) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Пусть функции $f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, z)$, $g^{\mu}(\boldsymbol{r}, z)$ непрерывны в области $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r}, z)$; пусть $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ — интеграл однородной системы (6) в $\mathfrak{G}_{n+1}$. Далее, пусть $\chi(\boldsymbol{r})$ непрерывная функция в $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$, для которой точка $(\boldsymbol{r}, z = \chi(\boldsymbol{r}))$ лежит в $\mathfrak{G}_{n+1}$, коль скоро $\boldsymbol{r}$ принадлежит $\mathfrak{G}_n$, и для которой

$$\psi(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) = \text{const};$$

$\psi_z(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) \not\equiv 0$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}_n$.

Тогда $z = \chi(\boldsymbol{r})$ — интеграл системы (5) (ср. с п. 5.4). Иначе говоря, интеграл системы (5) получается из интеграла $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ системы (6) разрешением уравнения $\psi = 0$ относительно z.

ГЛАВА II

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 8. Общие понятия, обозначения и терминология

8.1. Геометрическая интерпретация уравнения. *Общее (нелинейное) дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции* $z = z(x, y)$ *двух независимых переменных* имеет вид

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

или, если снова использовать обозначения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$F(x, y, z, p, q) = 0; \tag{1a}$$

при этом $F = F(x, y, z, p, q)$ — данная функция, которая предполагается имеющей в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ пространства x, y, z, p, q непрерывные частные производные первого порядка по всем пяти переменным.

Уравнение, *разрешенное относительно одной из производных*, имеет вид

$$p = f(x, y, z, q) \quad \text{или} \quad q = f(x, y, z, p); \tag{2}$$

уравнение (1) называется уравнением, *не разрешенным относительно производной*.

По поводу определения *интегральной поверхности* см. пп. 1.1 и 8.8.

Дифференциальное уравнение (1) каждой точке (x_0, y_0, z_0) пространства x, y, z ставит в соответствие семейство плоскостных элементов x_0, y_0, z_0, p, q (ср. с п. 2.1), направляющие коэффициенты p, q которых связаны соотношением

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

Плоскостные элементы, соответствующие в силу этого уравнения точке (x_0, y_0, z_0), определяют однопараметрическое семейство плоскостей, огибающей которого является, вообще говоря, невырожденная[1]) коническая поверхность с вершиной (x_0, y_0, z_0) (рис. 19). Этот конус[2]) называют *конусом Монжа* (*направляющим конусом*, *конусом T*) дифференциального уравнения (1) в данной точке.

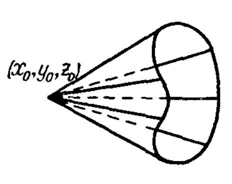


Рис. 19.

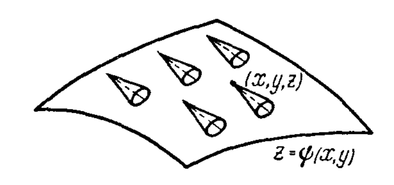


Рис. 20.

Следовательно, в силу дифференциального уравнения (1), каждой точке (x, y, z) (разумеется, в случае, если уравнение (1a) для этой точки имеет вещественные решения p, q[3])) ставится в соответствие направляющий конус. Само дифференциальное уравнение (1) представляется геометрически **полем конусов** в пространстве x, y, z (аналогично полю направлений на плоскости в случае обыкновенного дифференциального уравнения) (рис. 20).

В этой геометрической интерпретации задача решения уравнения (1) означает следующее: требуется найти такую непрерывно дифференцируемую поверхность $z = \psi(x, y)$, в каждой точке которой плоскостной элемент $x, y, z = \psi(x, y),\ p = \psi_x(x, y),\ q = \psi_y(x, y)$

---

[1]) [Если функция F линейна по p и q, т. е. в случае квазилинейного уравнения, получается пучок плоскостей, проходящих через прямую, называемую «осью Монжа» (см. пп. 2.1 и 5.1). Если функция F нелинейна, то получается общий случай: возможные касательные плоскости к интегральной поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) определяются одновременно двумя уравнениями

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$
$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

т. е. они образуют семейство плоскостей от одного параметра, проходящих через фиксированную точку. Огибающей такого семейства является конус. — *Прим. ред.*]

[2]) [Точнее, рассматривается достаточно малая часть полости конуса, соответствующая достаточно малой области изменения p и q. В целом конус Монжа может состоять из нескольких отдельных полостей. — *Прим. ред.*]

[3]) Если, например, $F = p^2 + q^2 + 1$, то не существует (вещественного) плоскостного элемента, удовлетворяющего уравнению (1). При наглядном истолковании обычно отказываются от таких случаев. Но они, помимо случайных ограничений из следующего пункта этой главы, которые ни в коем случае не содержат теоремы существования, отнюдь не исключены. Примем, далее, во внимание, что также случай $F = 0$ до сих пор не исключался.

удовлетворяет уравнению (1a). Другими словами, в каждой точке (x, y, z) интегральной поверхности $z=\psi(x, y)$ ее касательная плоскость одновременно должна быть касательной плоскостью направляющего конуса, соответствующего рассматриваемой точке [1]) (рис. 20).

Пусть данное дифференциальное уравнение (1) квазилинейно:

$$f(x, y, z)\, p+g(x, y, z)\, q=h(x, y, z), \quad |f|+|g|>0; \tag{3}$$

тогда направляющий конус, принадлежащий точке (x_0, y_0, z_0), вырождается в прямую линую

$$x-x_0=f_0 t, \qquad y-y_0=g_0 t, \quad z-z_0=h_0 t, \tag{3a}$$

где t — параметр, а f_0, g_0, h_0 — значения функций f, g, h в точке (x_0, y_0, z_0). Семейство касательных плоскостей направляющего конуса превращается в данном случае в пучок плоскостей, проходящих через эту прямую, кроме плоскости, перпендикулярной к плоскости x, y (см. пп. 2.1 и 5.1).

8.2. Геометрическая интерпретация характеристик. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка можно сводить к системе обыкновенных дифференциальных уравнений постольку, поскольку их интегральные поверхности могут быть построены из характеристик. Аналогичное сведéние возможно также для уравнения (1).

Для квазилинейного дифференциального уравнения (3) каждая характеристика в каждой своей точке имеет касательной ось пучка плоскостей, построенного для данной точки, т. е. каждой точке пространства (x, y, z) поставлено в соответствие определенное направление, геометрически заданное осью соответствующего пучка. Это поле направлений аналитически описывается характеристической системой [2]). При переносе этого обстоятельства на дифференциальное уравнение (1) сразу же возникает осложнение, состоящее в том,

---

[1]) [Таким образом, интегральная поверхность в каждой точке касается соответствующего конуса Монжа. Ср. с геометрической интерпретацией интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения. — *Прим. ред.*]

[2]) [В самом деле, характеристическая система уравнения (3)

$$x'(t)=f(x, y, z), \quad y'(t)=g(x, y, z), \quad z'(t)=h(x, y, z)$$

показывает, что в произвольной точке (x_0, y_0, z_0) характеристики направляющим вектором касательной к характеристике служит вектор $(f(x_0, y_0, z_0), g(x_0, y_0, z_0), h(x_0, y_0, z_0))$, являющийся одновременно направляющим вектором оси (3a) пучка плоскостей, соответствующего данной точке. — *Прим. ред.*]

что каждой точке пространства здесь соответствует направляющий конус с бесконечным множеством образующих[1]).

Однако если уже имеется интегральная поверхность $z=\psi(x, y)$ нелинейного уравнения (1), то точке (x_0, y_0, z_0) этой поверхности однозначно соответствует некоторое направление, именно, направление прямой, по которой плоскость, касательная к поверхности $z=\psi(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), касается конуса Монжа, построенного в этой точке. Следовательно, это направление играет здесь роль, аналогичную роли направления характеристики в линейном случае. Прямая, имеющая данное направление, определяется только тогда, когда известны направляющие коэффициенты $p=\psi_x(x_0, y_0)$ и $q=\psi_y(x_0, y_0)$, или, в общем случае, два направляющих коэффициента p_0 и q_0, соответствующие точке (x_0, y_0, z_0). Эти направляющие коэффициенты в случае нелинейного уравнения (1) также подлежат определению, т. е. наряду с тремя функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ необходимо еще найти две функции $p(t)$, $q(t)$.

Эти пять функций

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad p=p(t), \quad q=q(t) \tag{4}$$

играют в случае нелинейного уравнения (1) роль, аналогичную роли характеристики уравнения (3)[2]). Для их определения необходимо, согласно предыдущему, удовлетворить следующим условиям.

(α) В каждой точке $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$ пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ ее касательная должна быть образующей конуса Монжа, принадлежащего точке (x_0, y_0, z_0)[3]).

(β) Так как интегральная поверхность должна будет строиться из характеристик, то плоскостные элементы (4) должны быть плоскостными элементами интегральной поверхности (т. е. *принадлежать* интегральной поверхности).

---

[1]) [Направления образующих конуса Монжа, соответствующего некоторой точке, называются *характеристическими направлениями*. Если в случае квазилинейного уравнения (3) каждой точке пространства соответствует единственное характеристическое направление — направление оси Монжа, то в случае нелинейного уравнения (1) каждой точке пространства соответствует однопараметрическое семейство характеристических направлений. — *Прим. ред.*]

[2]) Сначала, быть может, несколько мешает, что z, p, q встречаются в различных значениях, именно, во-первых, в качестве независимых переменных, от которых зависит функция $F(x, y, z, p, q)$ или рассматриваемая область $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$; во-вторых, символы z, p, q могут обозначать функции от x, y в дифференциальном уравнении (1), причем $p=z_x$, $q=z_y$ и, наконец, в-третьих, символы z, p, q могут быть функциями независимой переменной t в уравнениях (4). Однако, как вскоре будет видно, не составляет труда придерживаться этих различных значений, и поэтому обозначение их различными символами принесло бы ненужные усложнения.

[3]) [Пространственная кривая, имеющая в каждой своей точке характеристическое направление (т. е. в каждой ее точке касательная является образующей соответствующего конуса Монжа), называется *фокальной кривой* или *кривой Монжа*. — *Прим. ред.*]

(β*) Это последнее требование будет, однако, заменено в аналитической формулировке определения характеристик более слабым: Плоскостные элементы (4) должны принадлежать поверхности $z=\psi(x, y)$, для которой $F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)$ постоянна [1]).

8.3. Определение полосы. Пусть плоскостные элементы (4) принадлежат какой-нибудь непрерывно дифференцируемой поверхности $z=\psi(x, y)$. Подставим функции (4) в равенство $z=\psi(x, y)$:

$$z(t) \equiv \psi(x(t), y(t)),$$

и продифференцируем получившееся тождество по t. Тогда мы придем к следующему равенству, называемому *условием полосы*:

$$z'(t) = p(t)\, x'(t) + q(t)\, y'(t). \tag{5}$$

Это приводит нас к определению полосы, не зависящему уже от какой-либо поверхности $z=\psi(x, y)$. Под *полосой* понимается однопараметрическое семейство плоскостных элементов (4), заданных в интервале $\alpha < t < \beta$ непрерывно дифференцируемыми функциями, для которых выполняется условие (5) [2]). Пространственная кривая, определенная тремя первыми функциями (4), называется *носителем полосы*. Кривая-носитель может в частном случае вырождаться в точку.

8.4. Вывод характеристической системы.

(а) Рассмотрим общее дифференциальное уравнение (1) при необходимых для дальнейшего предположениях о дифференцируемости и

---

[1]) [Плоскостные элементы (4) принадлежат некоторой поверхности $z=\psi(x, y)$, если выполнены следующие условия:

$$z(t) \equiv \psi(x(t), y(t)), \quad \psi'_x(x(t), y(t)) = p(t),$$
$$\psi'_y(x(t), y(t)) = q(t).$$

Иначе говоря, кривая $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ лежит на поверхности $z=\psi(x, y)$, а касательная плоскость в каждой точке этой кривой к поверхности имеет направляющими коэффициентами значения $p(t)$ и $q(t)$. — *Прим. ред.*]

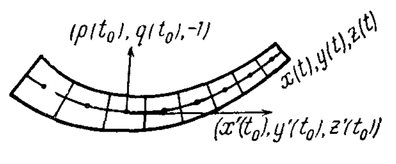


Рис. 21.

[2]) [Равенство (5) показывает, что вектор $(p(t), q(t), -1)$ ортогонален вектору $(x'(t), y'(t), z'(t))$, касательному к пространственной кривой $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Следовательно, плоскостные элементы (4) определяют пространственную кривую $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и касающуюся ее в каждой точке плоскость с направляющими коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ (см. подстр. примечание [1])). Таким образом, аналитически полосу можно определить как совокупность плоскостных элементов, удовлетворяющих дополнительному условию (5). Говоря геометрически, под полосой понимают конфигурацию, состоящую из кривой и семейства касающихся ее плоскостей (рис. 21). — *Прим. ред.*]

условии $|F_p| + |F_q| > 0$. Из требования (α) п. 8.2 получаем соотношение [1]):

$$x'(t) : y'(t) : z'(t) = F_p : F_q : (pF_p + qF_q),$$

причем в F_p, F_q подставлены функции (4). Если это соотношение выполнено, то касательная к кривой $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ является образующей соответствующего конуса Монжа. Отсюда путем надлежащего выбора параметра t получаем первые три уравнения (6). Из требования (β*) для некоторой поверхности $z = \psi(x, y)$, для которой $F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y) = \text{const}$, частным дифференцированием по x и y получаем два последних уравнения (6).

Это приводит нас к определению характеристической полосы, не зависящему от каких-либо известных пространственных кривых или поверхностей. Пусть функция $F(x, y, z, p, q)$ имеет в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ пространства x, y, z, p, q непрерывные частные производные первого порядка. Функции (4) со значениями в области $\mathfrak{G}$, непрерывно дифференцируемые при $\alpha < t < \beta$, определяют *характеристическую полосу* (*характеристику*) уравнения (1), если они удовлетворяют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x'(t) = F_p,\ \ y'(t) = F_q,\ \ z'(t) = p(t)F_p + q(t)F_q, \\ &p'(t) = -F_x - p(t)F_z,\ \ q'(t) = -F_y - q(t)F_z; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

при этом функции (4) подставлены в производные от F в качестве аргументов [2]). Уравнения (6) называются *характеристическими уравнениями* (*характеристической системой*) дифференциального уравнения в частных производных (1).

Поскольку в предположениях об F получается, что правые части системы (6) лишь непрерывны, то система (6) может иметь более одного решения. Если же потребовать, чтобы функция F была дважды непрерывно дифференцируема, то характеристическая полоса будет лишь одна (см. далее п. 8.6).

(б) Если дано дифференциальное уравнение типа (2), например

$$p = f(x, y, z, q), \qquad (7)$$

то система пяти характеристических уравнений (6) сводится к трем уравнениям. Первое характеристическое уравнение $x'(t) = 1$ позволяет нам положить: $t = x$. Так как в дальнейшем для построения интегральных поверхностей из характеристических полос будут рассматриваться только такие плоскостные элементы (4), которые

---

[1]) [Доказательство можно найти в книгах Степанов или Курант. — *Прим. ред.*]

[2]) [Отметим, что каждая полоса (см. п. 8.3), удовлетворяющая первым трем из уравнений (6) и соотношению $F(x, y, z, p, q)$, называется *фокальной полосой*. — *Прим. ред.*]

удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению (7), то в третьем уравнении (6) можно заменить p на f. Окончательно для определения функций $y(x)$, $z(x)$, $q(x)$ получается три уравнения:

$$y'(x) = -f_q, \quad z'(x) = f - qf_q, \quad q'(x) = f_y + qf_z. \tag{8}$$

Они называются *характеристическими уравнениями* дифференциального уравнения (7)

Для определения *характеристической полосы* добавляют еще одно уравнение

$$p(x) = f(x, \ y(x), \ z(x), \ q(x)). \tag{9}$$

(в) Для квазилинейного дифференциального уравнения (3) первые три из уравнений (6) имеют вид

$$x'(t) = f, \quad y'(t) = g, \quad z'(t) = pf + qg.$$

В последнем из этих уравнений $pf + qg$ может быть заменено на h, так как для построения интегральной поверхности из характеристик рассматриваются только такие элементы поверхности, которые удовлетворяют уравнению (3).

8.5. Другие выводы характеристической системы. Получение характеристик с помощью требований (α) и (β) или (β*) п. 8.2 имеет преимущество в наглядности. Однако недостаток такого определения характеристической системы состоит в том, что этот метод с трудом допускает перенесение на общий случай (больше искомых функций, независимых переменных больше двух, дифференциальные уравнения более высокого порядка). Поэтому здесь намечены еще три других метода. Третий из них — самый короткий и легче всего переносим на общие случаи.

(а) Ищутся плоскостные элементы (4), которые принадлежат одновременно нескольким интегральным поверхностям, например $z = \psi(x, y)$ и $z = \chi(x, y)$. Эти интегралы предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Кроме того, ни в каком подынтервале интервала $\alpha < t < \beta$ все три разности

$$\psi_{xx} - \chi_{xx}, \quad \psi_{xy} - \chi_{xy}, \quad \psi_{yy} - \chi_{yy}$$

после подстановки $x(t)$, $y(t)$ не должны быть тождественно равны нулю.

Тогда из уравнения (1) после подстановки интегралов и дифференцирования по x и по y следуют два уравнения для функции ψ:

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_z\psi_x + F_p\psi_{xx} + F_q\psi_{yx} = 0, \\ F_y + F_z\psi_y + F_p\psi_{xy} + F_q\psi_{yy} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а также два аналогичных уравнения с χ вместо ψ. Подставим теперь сюда функции (4); тогда по предположению коэффициенты F_x, F_y,

F_z, F_p, F_q, ψ_x, ψ_y уравнений (10) совпадают с соответствующими коэффициентами, которые появляются в уравнениях для χ. Получается поэтому система

$$\left.\begin{aligned}(\psi_{xx}-\chi_{xx})F_p+(\psi_{yx}-\chi_{yx})F_q=0,\\(\psi_{xy}-\chi_{xy})F_p+(\psi_{yy}-\chi_{yy})F_q=0\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

с подставленными сюда функциями (4).

С другой стороны, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}&z(t)=\psi(x(t),\ y(t)),\\&p(t)=\psi_x(x(t),\ y(t)),\ q(t)=\psi_y(x(t),\ y(t)),\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

и аналогичные уравнения остаются справедливыми для χ вместо ψ. Отсюда следует после дифференцирования условие полосы

$$z'=px'+qy',\qquad(13)$$

также еще четыре соотношения: два для ψ

$$p'=\psi_{xx}x'+\psi_{xy}y',\quad q'=\psi_{yx}x'+\psi_{yy}y'\qquad(14)$$

и остальные два с χ вместо ψ. Из этих четырех уравнений следует:

$$\begin{aligned}(\psi_{xx}-\chi_{xx})x'+(\psi_{xy}-\chi_{xy})y'=0,\\(\psi_{yx}-\chi_{yx})x'+(\psi_{yy}-\chi_{yy})y'=0.\end{aligned}$$

Так как ни в какой части интервала $(\alpha,\ \beta)$ все скобки $\neq 0$ и так как $\psi_{xy}=\psi_{yx}$, $\chi_{xy}=\chi_{yx}$, то сравнение этих уравнений с уравнениями (11) дает

$$y'F_p-x'F_q=0.$$

Если $|x'|+|y'|>0$, то выбором надлежащего переменного можно достичь того, чтобы были удовлетворены оба первых уравнения (6). Но тогда, в силу (13), удовлетворится также и 3-е уравнение системы (6). Наконец, уравнения (10) после подстановки функций (4) дадут соотношения

$$p'(t)=\frac{d}{dt}\psi_x(x(t),\quad y(t))=-F_x-pF_z,$$

$$q'(t)=\frac{d}{dt}\psi_y(x(t),\quad y(t))=-F_y-qF_z,$$

а это — два последних уравнения системы (6).

(б) Пусть $z=\psi(x,\ y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая интегральная поверхность дифференциального уравнения (1); пусть (4) — плоскостные элементы, принадлежащие этой интегральной поверхности. Если в уравнение (1) поставить $z=\psi$, то получаются, как и в (а), соотношения (10) и (12) — (14). Подставим теперь в (10)

функции (4), а потом уравнения (14) прибавим к соответствующим уравнениям (10); тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} p' + F_x + pF_z &= \psi_{xx}(x' - F_p) + \psi_{xy}(y' - F_q), \\ q' + F_y + qF_z &= \psi_{yx}(x' - F_p) + \psi_{yy}(y' - F_q). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Уравнения (13) и (15) справедливы для каждой полосы, принадлежащей интегральной поверхности. Оба уравнения (15) существенно упрощаются, когда полоса выбирается так, что

$$x' = F_p, \quad y' = F_q,$$

т. е. когда получаются как раз характеристические уравнения (6).

(в) Пусть дана пространственная кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Возникает вопрос, когда она единственным образом может быть дополнена до такой однопараметрической совокупности плоскостных элементов (4), каждый из которой удовлетворяет уравнению (1)? Это как раз тот случай, когда $p(t)$, $q(t)$ могут быть выбраны единственным образом такими непрерывно дифференцируемыми функциями, что выполняется условие полосы

$$px' + qy' - z' = 0$$

и удовлетворяется уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Если числа $p_0 = p(t_0)$, $q_0 = q(t_0)$ удовлетворяют обоим только что написанным уравнениям, то, в силу теоремы о неявных функциях, существуют (в некоторой окрестности значения t_0) непрерывные функции $p(t)$, $q(t)$, удовлетворяющие обоим этим уравнениям, если только функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (16)$$

Обратно, если это условие не выполнено, то

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (17)$$

для некоторой полосы (4); если, кроме того, $|F_p| + |F_q| > 0$ или $|x'| + |y'| > 0$, то при надлежащем выборе параметра t

$$x' = F_p, \quad y' = F_q.$$

Следовательно, условие, противоположное неравенству (16), приводит непосредственно к первым двум из характеристических уравнений (6). Третье из уравнений (6) является не чем иным, как условием полосы. Оба последних уравнения получают, как в п. 8.4.

8.6. Обыкновенные и особые плоскостные элементы. Плоскостной элемент x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 называется *обыкновенным* (*регулярным*, *правильным*) или *особым* (*нерегулярным*) для дифференциального уравнения (1), смотря по тому, будет ли $|F_p|+|F_q|>0$ или $|F_p|+|F_q|=0$ в точке $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$.

Для каждой характеристической полосы, содержащей по крайней мере один обыкновенный плоскостной элемент, ни кривая-носитель, ни ее проекция на плоскость x, y не состоят только из одной точки. Если характеристическая полоса содержит особый плоскостной элемент, то она может иметь различные свойства, как показывают приводимые примеры.

В следующих примерах 0, 0, 0, 0, 0 — особый плоскостной элемент; исследуется характеристическая полоса, которая проходит через него при $t=0$.

(а) $$p^2+q^2=x+y.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p, \quad y'=2q, \quad z'=2p^2+2q^2, \quad p'=1, \quad q'=1.$$

Из двух последних уравнений следует $p=q=t$, после чего из двух первых находим $x=y=t^2$. Кривая-носитель состоит, следовательно, не только из одной точки.

(б) $$(p+1)\,x+(q+1)\,y=z.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=x, \quad y'=y, \quad z'=xp+yq, \quad p'=-1, \quad q'=-1.$$

Из двух первых уравнений следует $x=y=0$, после чего из третьего находим $z=0$; в то же время оба последних уравнения дают $p=q=-t$. Кривая-носитель состоит здесь только из одной точки, но ей соответствует бесконечно много направляющих коэффициентов.

(в) $$p^2+q^2-xp-yq+z=0.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p-x, \quad y'=2q-y, \quad z'=2p^2+2q^2-xp-yq, \quad p'=0, \quad q'=0.$$

Из двух последних уравнений следует $p=q=0$, после чего из трех первых находим $x=y=z=0$. Характеристическая полоса состоит из единственного плоскостного элемента.

(г) $$p^2+q^2+x^2+y^2=0.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p, \quad y'=2q, \quad z'=2p^2+2q^2, \quad p'=-2x, \quad q'=-2y.$$

Из них следует соотношение $xx'+yy'+pp'+qq'=0$, или $x^2+y^2+p^2+q^2=0$, т. е. $x=y=p=q=0$. Из третьего характеристического уравнения находим: $z=C$ при любом C. Поэтому особыми плоскостными элементами будут:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=C, \quad p=0, \quad q=0.$$

Одновременно это и единственные интегральные элементы. Следовательно, как непосредственно видно из дифференциального уравнения, интегральной поверхности не существует.

8.7. Интегральные полосы и интегральные поверхности. Плоскостной элемент x, y, z, p, q называется *интегральным элементом* дифференциального уравнения (1), если $F(x, y, z, p, q)=0$. Полоса (4), (5) называется *интегральной полосой*, если она состоит только из интегральных элементов.

(а) Функция $F(x, y, z; p, q)$ постоянна вдоль каждой характеристической полосы дифференциального уравнения (1), т. е.

$$F(x(t),\ y(t),\ z(t),\ p(t),\ q(t))=\text{const};$$

поэтому характеристическая полоса является интегральной полосой, если она содержит хотя бы один интегральный элемент.

Для разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений (7) каждая характеристическая полоса всегда является интегральной полосой: в этом случае справедливо уравнение (9).

(б) Если функция $z=\psi(x, y)$ в области $\mathfrak{G}(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемым интегралом дифференциального уравнения (1) и если

$$x_0,\ y_0,\ \psi(x_0, y_0),\ \psi_x(x_0, y_0),\ \psi_y(x_0, y_0) \tag{18}$$

— любой плоскостной элемент этой интегральной поверхности, то любая характеристическая полоса[1]) уравнения (1), которая содержит этот плоскостной элемент, принадлежит поверхности $z=\psi(x, y)$, коль скоро две первые координаты x, y этой полосы являются точками области $\mathfrak{G}$[2]).

Следовательно, дважды непрерывно дифференцируемые интегральные поверхности могут быть построены из характеристических полос.

(в) Если $z=\psi(x, y)$ и $z=\chi(x, y)$ — две дважды непрерывно дифференцируемые в области $\mathfrak{G}(x, y)$ интегральные поверхности уравнения (1) с одним общим плоскостным элементом (18), то все характеристические полосы уравнения (1), которые содержат этот плоскостной элемент, одновременно принадлежат обеим интегральным поверхностям, если только $(x(t), y(t))$ — точки области $\mathfrak{G}$.

Если этот общий плоскостной элемент — обыкновенный, то обе интегральные поверхности, в силу п. 8.6, имеют общую кривую, не вырождающуюся в точку.

---

[1]) Если функция F дважды непрерывно дифференцируема или же благодаря каким-либо условиям гарантирована однозначная разрешимость характеристических уравнений (6) при заданных начальных условиях, то существует лишь единственная полоса такого рода.

[2]) Относительно ослабления условий о дифференцируемости см. A. Haar, Acta Szeged **4** (1928); 103—114; T. Wazewski, Annales Soc. Polon. Math. **13** (1934), 10—12; Math. Zeitschrift **43** (1938), 521—532.

8.8. Частный, особый, полный и общий интегралы.

(а) *Частный интеграл* уравнения (1) — не что иное, как некоторый интеграл дифференциального уравнения, т. е. какая-то функция $z=\psi(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (1). Поэтому термин «частный интеграл» означает, как правило, то же, что и просто «интеграл».

(б) Интеграл дифференциального уравнения (1) $z=\psi(x, y)$ называется *особым*, если он содержит только особые интегральные элементы (ср. с пп. 8.6, 8.7), т. е. когда три уравнения

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad F_p=0, \quad F_q=0 \tag{19}$$

одновременно справедливы для

$$z=\psi, \quad p=\psi_x, \quad q=\psi_y. \tag{20}$$

Если подставить (20) в (19), то после частного дифференцирования получается, что для дважды непрерывно дифференцируемых особых интегралов имеют место соотношения

$$F_x+pF_z=0, \quad F_y+qF_z=0. \tag{21}$$

Интеграл, который не содержит особых интегральных элементов, может вполне называться *обыкновенным*. Произвольный интеграл может, естественно, содержать как обыкновенные, так и особые плоскостные элементы.

Особые интегралы данного дифференциального уравнения (1) получаются, когда из уравнений (19) или (в случае, если ищут дважды непрерывно дифференцируемую интегральную поверхность) из (19) и (21) определяют все интегральные элементы x, y, z, p, q и исследуют, можно ли из них составить непрерывно дифференцируемые поверхности $z=\psi(x, y)$.

Пример. $pq=z$.
Особые плоскостные элементы получаются из соотношений

$$z=pq, \quad q=0, \quad p=0;$$

следовательно, $z=p=q=0$ при любом x, y, и эти элементы объединяются в особую интегральную поверхность $z=0$.

(в) *Полный интеграл* дифференциального уравнения (1) есть двупараметрическое семейство интегралов

$$z=\psi(x, y, a, b), \tag{22}$$

причем функция ψ вместе с ψ_x, ψ_y в некоторой области пространства x, y, a, b должна быть непрерывно дифференцируема по всем

четырем аргументам, а функциональная матрица

$$\frac{\partial(\psi, \psi_x, \psi_y)}{\partial(a, b)}$$

в каждой точке этой области должна иметь ранг 2 [1]).

Роль полного интеграла, который, впрочем, определяется дифференциальным уравнением отнюдь не однозначно, основана на том, что из него одним только процессом дифференцирования и исключения можно вывести все интегралы уравнения. Говоря грубо, полный интеграл приблизительно соответствует интегральному базису линейного однородного дифференциального уравнения (см. п. 3.4).

(г) *Общим интегралом* называется интеграл уравнения (1), который зависит от одной произвольной функции. При этом зависимость понимается так, что в (в) входит $b=\varphi(a)$ с произвольной функцией φ. Отметим, что более подходящим было бы требование, чтобы интеграл зависел от произвольной данной начальной полосы.

§ 9. Метод Лагранжа

9.1. Первые интегралы. Пусть задано квазилинейное уравнение

$$f(x, y, z)\,p + g(x, y, z)\,q = h(x, y, z); \qquad (*)$$

если $w=\psi(x, y, z)$ — интеграл соответствующего однородного уравнения

$$f(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial y} + h(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (**)$$

то, согласно п. 5.4, интеграл уравнения (*) можно получить, разрешая уравнение $\psi=C$ относительно z. При этом интегралы ψ уравнения (**) являются непрерывно дифференцируемыми функциями, постоянными вдоль каждой характеристики уравнения (**), или, что то же самое, вдоль каждой характеристики уравнения (*).

Метод Лагранжа [2]) для уравнения

$$F(x, y, z;\ p, q) = 0 \qquad (1)$$

состоит в реализации аналогичного подхода для дифференциального уравнения (1).

(а) О функциях $F(x, y, z, u, v)$, $G(x, y, z, u, v)$, $H(x, y, z, u, v)$, которые встречаются ниже, будем предполагать, что все они непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y, z, u, v)$.

---

[1]) Также еще требуется, чтобы через x, y, ψ, ψ_x, ψ_y доставлялись сразу все интегральные элементы уравнения (1). Однако это требование, пожалуй, нигде последовательно не проводится. Благодаря ему практическая полезность полных интегралов становилась бы излишне осложненной.

[2]) [Этот метод иногда называют *методом Лагранжа — Шарпи*; **см.** Степанов, стр. 381—392. — *Прим. ред.*]

Функция $G(x, y, z, u, v)$ называется *первым интегралом* уравнения (1), если она постоянна вдоль каждой характеристики уравнения (1), т. е. вдоль каждого решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ характеристической системы дифференциальных уравнений (см. п. 8.4)

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)=F_u, \quad y'(t)=F_v, \quad z'(t)=uF_u+vF_v, \\ &u'(t)=-F_x-uF_z, \quad v'(t)=-F_y-vF_z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Согласно п. 3.2, это означает, что функция G является интегралом линейного однородного дифференциального уравнения

$$F_u\frac{\partial w}{\partial x}+F_v\frac{\partial w}{\partial y}+(uF_u+vF_v)\frac{\partial w}{\partial z}-\\-(F_x+uF_z)\frac{\partial w}{\partial u}-(F_y+vF_z)\frac{\partial w}{\partial v}=0. \tag{3}$$

Подставляя в (3) интеграл G, мы приходим к соотношению

$$[F(x, y, z, u, v),\ G(x, y, z, u, v)]\equiv 0 \text{ в } G; \tag{4}$$

выражение

$$[F, G]=-[G, F]=(F_x+uF_z)G_u+\\+(F_y+vF_z)G_v-(G_x+uG_z)F_u-(G_y+vG_z)F_v \tag{5}$$

носит название *скобок Якоби*. О функциях F и G, удовлетворяющих соотношению (4), говорят также, что они *находятся в инволюции друг к другу*.

В силу п. 8.7 (а), функция $F(x, y, z, u, v)$ — очевидный первый интеграл уравнения (1)[1]). Для получения остальных его первых интегралов надо решить линейное однородное дифференциальное уравнение (3) (см. § 3).

(б) Для дальнейшего оказывается очень полезно ввести еще одно понятие интеграла дифференциального уравнения (1). Функция $G(x, y, z, u, v)$ будет называться *специальным первым интегралом*[2]) уравнения (1), если она постоянна вдоль каждой характеристической интегральной полосы уравнения (1). Функция G тогда и только тогда является специальным первым интегралом уравнения (1), когда соотношение (4) выполняется для каждого интегрального элемента x, y, z, u, v этого уравнения.

Пример. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.

Характеристические уравнения таковы:

$$\begin{aligned} &x'=2x(xp+yq-z)-2pf, \\ &y'=2y(xp+yq-z)-2qf, \\ &z'=2(xp+yq)(xp+yq-z)-2(p^2+q^2)f, \\ &p'=2x(p^2+q^2)f', \quad q'=2y(p^2+q^2)f'. \end{aligned}$$

---

[1]) Это, впрочем, видно и непосредственно из уравнения (3), решением которого является $w=F$.

[2]) [В подлиннике — Vorintegral im weiteren Sinne. — *Прим. ред.*]

Из двух первых уравнений следует:

$$y'p - x'q = 2(yp - xq)(xp + yq - z),$$

а из двух последних —

$$yp' - xq' = 0.$$

Складывая эти два уравнения, получаем:

$$\frac{(yp - xq)'}{yp - xq} = 2(xp + yq - z). \qquad (*)$$

Ограничиваясь только характеристическими интегральными полосами, можно привлечь к преобразованию характеристических уравнений еще и исходное дифференциальное уравнение. Именно, исходное уравнение и третье характеристическое уравнение дают соотношение

$$z' = 2z(xp + yq - z).$$

Таким образом, уравнение (*) принимает вид

$$\frac{(yp - xq)'}{yp - xq} = \frac{z'}{z},$$

откуда видно, что $\ln|yp - xq| - \ln|z|$ или, что то же самое,

$$\frac{yp - xq}{z}$$

— специальный первый интеграл (поскольку для его образования было использовано само дифференциальное уравнение).

(в) Если функция G является специальным первым интегралом дифференциального уравнения (1) и если $p = U(x, y, z)$, $q = V(x, y, z)$ в области $\mathfrak{G}(x, y, z)$ — о б щ е е непрерывно дифференцируемое решение одновременно обоих уравнений $F = 0$ и $G = 0$, то

$$[F, G] = 0 \text{ в } \mathfrak{G},$$

если скобка Якоби вычислена для $p = U$, $q = V$. Если G и H — специальные первые интегралы дифференциального уравнения (1) и если функции $z = \psi(x, y)$, $p = U(x, y)$, $q = V(x, y)$ являются общими решениями в области $\mathfrak{G}(x, y)$ одновременно трех уравнений $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$, то

$$[F, G] = 0 \quad \text{и} \quad [F, H] = 0 \quad \text{в} \quad \mathfrak{G},$$

если скобки Якоби вычислены для $z = \psi$, $p = U$, $q = V$.

Таким образом, решать дифференциальные уравнения (1) можно по-разному, в зависимости от того, два или только один специальный первый интеграл удается разыскать (кроме очевидного первого интеграла F).

9.2. Случай двух неочевидных первых интегралов. Если, кроме очевидного первого интеграла F дифференциального уравнения (1), известны еще два специальных первых интеграла G и H, то, со-

гласно методу, намеченному в п. 9.1, мы будем поступать следующим образом. Разрешим уравнения

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, u, v) = 0, \quad G(x, y, z, u, v) = 0, \\ H(x, y, z, u, v) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

относительно z, u, v. Если при этом получаются непрерывные функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и непрерывно дифференцируемая функция $z = z(x, y)$, то проверим, будет ли $z_x = u$, $z_y = v$. Если это так, то функция $z(x, y)$, очевидно, является, решением уравнения (1), и, более того, — общим решением трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) = 0, \quad G(x, y, z, p, q) = 0, \\ H(x, y, z, p, q) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(а) Два уравнения вида (1) не всегда имеют одно общее решение, как показывает тривиальный пример $p = 0$, $p = 1$. Справедлива следующая теорема: если функция $\psi(x, y)$, определенная в области $\mathfrak{G}(x, y)$, — дважды непрерывно дифференцируемый интеграл обоих дифференциальных уравнений

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad G(x, y, z, p, q) = 0, \tag{8}$$

то ψ удовлетворяет в $\mathfrak{G}$ и дифференциальному уравнению

$$[F(x, y, z, p, q), \quad G(x, y, z, p, q)] = 0. \tag{9}$$

Таким образом, необходимым условием одновременной разрешимости обоих уравнений (8) является наличие общего решения для трех уравнений (8), (9)[1].

(б) Для проведения намеченного выше метода надо еще потребовать соответствующих условий для функций F, H и G, H-(аналогичных условию (9)), а также функциональной независимости трех уравнений (6) в том смысле, что функциональный определитель функции F, G, H относительно z, u, v отличен от нуля. Тогда имеет место следующая теорема:

Пусть функции

$$z = \psi(x, y), \quad u = U(x, y), \quad v = V(x, y) \tag{10}$$

непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y)$ и удовлетворяют там уравнениям (6). Далее, пусть для функций (10) скобки Якоби равны нулю:

$$[F, G] = 0, \quad [F, H] = 0, \quad [G, H] = 0 \quad \text{в} \quad \mathfrak{G}(x, y), \tag{11}$$

[1] Уравнение (9), так же как и оба уравнения (8), отнюдь не будут новыми условиями. Если, например, G является первым интегралом уравнения (1), то, в силу 9.1, уравнение (4) выполняется даже тождественно для всех пяти переменных.

а в каждой подобласти области $\mathfrak{G}$

$$\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (z, u, v)} \neq 0. \tag{12}$$

Тогда

$$U(x, y) = \psi_x(x, y), \quad V(x, y) = \psi_y(x, y),$$

следовательно, функция $\psi(x, y)$ является общим интегралом уравнений (7) в области $\mathfrak{G}(x, y)$ и, в частности, интегралом дифференциального уравнения (1).

Предположения (11) и (12) сохраняются, если мы заменим функции G и H на $G - a$, $H - b$, где a, b — произвольные постоянные. Функции (10) можно в этом случае получить путем решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, u, v) = 0, \quad G(x, y, z, u, v) = a, \\ H(x, y, z, u, v) = b, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

и, таким образом, в некоторой области получается п о л н ы й интеграл $z = \psi(x, y; a, b)$ уравнения (1).

(в) При применении (б) к решению конкретного дифференциального уравнения (1) сначала составляют характеристические уравнения (2) (которые пишутся так же, как в § 8, (6), с буквами p, q вместо u, v). Далее стараются, комбинируя эти уравнения, получить такие две непрерывно дифференцируемые функции G и H, которые постоянны вдоль каждой характеристики или вдоль каждой характеристической интегральной полосы, т. е. получить два первых интеграла — собственных или специальных. При этом нужно обратить внимание на то, чтобы три функции F, G, H были функционально независимы друг от друга. Оба первых уравнения (11) заведомо выполняются (тождественно по x, y, z, u, v) для собственных первых интегралов уравнения (1), а также и для специальных первых интегралов. Наконец, разрешают уравнения (6), или более общее (13), относительно z, u, v. Подстановкой найденной функции $z = \psi(x, y)$ в уравнение (1) или проверкой выполнения всех остальных предположений (б) можно определить, является ли функция $z = \psi(x, y)$ интегралом дифференциального уравнения (1).

П р и м е р.

$$pq = z. \tag{14}$$

Для него характеристическими будут следующие уравнения:

$$x'(t) = v, \quad y'(t) = u, \quad z'(t) = 2uv, \quad u'(t) = u, \quad v'(t) = v.$$

Из них следуют соотношения

$$u' - y' = 0, \quad v' - x' = 0, \quad u'v - uv' = 0,$$

а поэтому функции $u - y$, $v - x$ и, если можно ограничиться областью, в которой $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями,

постоянными вдоль каждой характеристики уравнения (14), т. е. эти три функции являются первыми интегралами. Уравнение (14) имеет, кроме того, очевидный первый интеграл $z = uv$. Любая непрерывно дифференцируемая функция от указанных первых интегралов снова есть первый интеграл.

Если теперь положить

$$F = z - uv, \quad G = u - y, \quad H = \frac{u}{v} - 1,$$

то уравнения (6) имеют решение $z = y^2$, не являющееся, однако, интегралом уравнения (14). Это, впрочем, не противоречит теореме (б), поскольку здесь $[G, H] = \frac{u}{v^2} \neq 0$.

Если положить

$$F = z - uv, \quad G = x - v, \quad H = y - u,$$

то из уравнений (13) получим полный интеграл

$$z = (x - a)(y - b).$$

Если мы выберем первые интегралы

$$F = z - uv, \quad G = a(x - v) + y - u, \quad H = \frac{u}{v},$$

то из уравнений (13) получаем полный интеграл

$$z = \frac{1}{4a}(ax + y - b)^2.$$

9.3. Случай одного неочевидного первого интеграла. Если для дифференциального уравнения (1) найден только один первый интеграл G в собственном или специальном смысле, независимый от очевидного интеграла F, то также удается получить полный интеграл. С этой целью разрешают уравнения

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad G(x, y, z, u, v) = a \tag{15}$$

при произвольном a относительно u, v; это дает, вообще говоря, числовую систему x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, которая удовлетворяет обоим уравнениям, причем функциональный определитель $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0$ в окрестности этой точки. В этом случае оба уравнения (15) имеют в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) непрерывно дифференцируемое решение $u = U(x, y, z)$, $v = V(x, y, z)$. Используя это решение, образуют систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = U(x, y, z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = V(x, y, z) \tag{16}$$

и ищут ее решение $z = \psi(x, y)$. Так как из предположений следует условие интегрируемости

$$U_y + VU_z = V_x + UV_z$$

в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то (ср. с п. 7.1) такое решение существует, и при этом можно выбрать для $\psi(x_0, y_0)$ еще одно

произвольное значение b в достаточно малой окрестности z_0. Тогда функция $z=\psi(x, y; a, b)$ будет общим интегралом уравнений (16) и полным интегралом уравнения (1). Область существования этого интеграла, вообще говоря, оказывается больше, чем ожидалось по предположениям.

Пример 1. $pq=z$.

В п. 9.2 (в) были найдены первые интегралы $u-y$, $v-x$, $\frac{u}{v}$. Если положить $G=u-y$, то уравнения (15) приобретают в этом случае следующий вид:

$$uv=z, \quad u-y=b,$$

т. е. надо решить систему (см. (16))

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+b, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y+b};$$

ее решение

$$z=(x+a)(y+b).$$

Тот же результат получают со вторым из первых интегралов; с третьим получают полный интеграл в виде

$$z=\frac{1}{4}\left(ax+\frac{y}{a}+b\right)^2.$$

Пример 2. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.

В п. 9.1 (б) был найден специальный первый интеграл $(yp-xq)/z$. Если приравнять его к A, то, разрешая это и исходные уравнения относительно p, q, получаем:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial x}=\frac{Ay}{r^2}+\frac{x}{r^2-f}\pm\frac{x}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R},$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial y}=-\frac{Ax}{r^2}+\frac{y}{r^2-f}\pm\frac{y}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R},$$

где $r^2=x^2+y^2$, $R=(A^2+r^2)f-A^2f^2$. Отсюда можно найти $\ln z$, введя вместо x, y полярные координаты.

9.4. Получение однопараметрического семейства интегралов из двух неочевидных первых интегралов. Может случиться, что наряду с очевидным первым интегралом получаются два специальных первых интеграла G, H, которые, однако, не находятся в инволюции. Тогда путем специального выбора в (13) констант a, b иногда удается добиться получения однопараметрического семейства интегралов исходного уравнения (1).

Пример. $pq=x+y+z$.

Из характеристических уравнений

$$x'=q, \quad y'=p, \quad z'=2pq, \quad p'=p+1, \quad q'=q+1$$

находим первые интегралы

$$p-q+x-y, \quad \frac{p+1}{q+1},$$

которые, однако, не находятся в инволюции. Если написать, несмотря на это, уравнения (13):

$$pq = x + y + z, \quad p - q + x - y = 2a, \quad p + 1 = b(q + 1),$$

то получим:

$$(b-1)p = b(y-x) + 2ab - b + 1, \quad (b-1)q = y - x + 2a - b + 1. \quad (*)$$

Так как $p = z_x$, $q = z_y$, то должно быть $p_y = q_x$; это условие, примененное к уравнениям (*), показывает, что $b = -1$. Для этого значения имеем:

$$2z_x = y - x + 2a - 2, \quad 2z_y = x - y - 2a - 2,$$

следовательно,

$$z = -\frac{(x-y)^2}{4} + a(x-y) - (x+y) + 1 - a^2.$$

Тем самым найдено однопараметрическое семейство интегралов заданного уравнения.

9.5. Получение частных интегралов из полного интеграла. (а) Пусть

$$z = \psi(x, y; a, b) \tag{17}$$

— полный интеграл дифференциального уравнения (1) в окрестности[1]) точки (x_0, y_0, a_0, b_0). Метод, которым из него можно образовать специальные интегралы, геометрически сводится к конструированию огибающей поверхности ко всему множеству или к некоторому подмножеству интегральных поверхностей, входящих в полный интеграл. Аналитически этот метод реализуется вариацией постоянных.

Если

$$a = \alpha(x, y), \quad b = \beta(x, y) \tag{18}$$

— непрерывно дифференцируемые функции, то из (17) после частного дифференцирования следует:

$$z_x = \psi_x + \psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x, \quad z_y = \psi_y + \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y,$$

и если

$$\psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x = 0, \quad \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y = 0, \tag{19}$$

то эти две функции (18), будучи подставлены в (17), дают интеграл дифференциального уравнения (1).

(б) Уравнения (19) удовлетворяются тривиальным образом, если $\psi_a = \psi_b = 0$. Если же эти уравнения тождественно удовлетворяются по x, y, то получают особую интегральную поверхность как огибающую совокупности интегральных поверхностей. Впрочем, для получения этих интегральных поверхностей есть прямой метод (см. п. 8.8 (б)), в общем, более удобный.

[1]) Предполагается, что все дальнейшие рассуждения проводятся в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

(в) Более важным является следующий случай[1]). Если $\Phi(a, b)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции и если выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} |\Phi_a| + |\Phi_b| > 0, \quad \Phi(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = 0, \\ \psi_\alpha(x, y; \alpha, \beta)\Phi_b(\alpha, \beta) - \psi_b(x, y; \alpha, \beta)\Phi_a(\alpha, \beta) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

то функция

$$z = \psi(x, y; \alpha(x, y), \beta(x, y))$$

— также интеграл уравнения (1), являющийся огибающей поверхностью к поверхностям (17) с дополнительным условием $\Phi(a, b) = 0$. Если функция Φ дана, то оба уравнения (20) служат для вычисления функций α, β, если, конечно, решения этих уравнений существуют.

Пример. $pq = z$.
Согласно п. 9.2 (в),

$$z = (x - a)(y - b)$$

— полный интеграл. Если взять

$$\Phi(a, b) = \lambda a + \mu b \qquad (|\lambda| + |\mu| > 0),$$

то первое из условий (20) выполняется. Уравнения (20) имеют в данном случае вид

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0, \quad \lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta) = 0,$$

откуда получается

$$\alpha = \frac{\lambda x - \mu y}{2\lambda}, \quad \beta = -\frac{\lambda x - \mu y}{2\mu}.$$

Таким образом, если $\lambda\mu \neq 0$, то получается интеграл

$$z = \frac{1}{4\lambda\mu}(\lambda x + \mu y)^2.$$

(г) Пусть $\chi(x, y)$ — интеграл дифференциального уравнения (1). Он, в силу (а), получается из полного интеграла (17), если выбрать подходящим образом непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$:

$$\psi(x, y; \alpha, \beta) = \chi, \quad \psi_x = \chi_x, \quad \psi_y = \chi_y \tag{21}$$

и

$$\psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x = 0, \qquad \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y = 0. \tag{22}$$

---

[1]) К этому случаю можно прийти следующим образом. Если $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x \neq 0$, то из (19) следует, что $\psi_a = \psi_b = 0$, так что имеет место предыдущий случай. Если же, напротив, $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0$, то функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, в силу 2.7 (а), зависимы. Если эта зависимость осуществляется посредством функции $\Phi(a, b)$, то мы приходим как раз к случаю (в) с предположениями (20).

Практически для вычисления функций α, β используют соотношения (21), а затем проверяют, удовлетворяют ли эти функции уравнениям (22).

Рассмотрим уже решавшийся в (б) пример. Положим:

$$\psi(x, y; a, b) = (x-a)(y-b), \quad \chi(x, y) = \frac{(\lambda x + \mu y)^2}{4\lambda\mu};$$

тогда уравнения (21) приобретут следующий вид:

$$(x-a)(y-b) = \frac{(\lambda x + \mu y)^2}{4\lambda\mu}, \quad y - b = \frac{\lambda x + \mu y}{2\mu}, \quad x - a = \frac{\lambda x + \mu y}{2\lambda}.$$

В итоге получаем:

$$a = \alpha(x, y) = \frac{\lambda x - \mu y}{2\lambda}, \quad b = \beta(x, y) = \frac{\mu y - \lambda x}{2\mu}.$$

Для этих функций уравнения (22) также выполнены.

9.6. Решение задачи Коши. Пусть в окрестности точки τ_0 задана интегральная полоса

$$x = \omega_1(\tau), \quad y = \omega_2(\tau), \quad z = \omega_3(\tau), \quad p = \omega_4(\tau), \quad q = \omega_5(\tau), \tag{23}$$

это означает, что справедливы следующие равенства:

$$\omega_3' = \omega_4\omega_1' + \omega_5\omega_2' \tag{24}$$

(условие полосы) и

$$F(\omega_1, \ldots, \omega_5) = 0. \tag{25}$$

Требуется найти интегральную поверхность, содержащую полосу (23) [1].

Попытаемся получить эту интегральную поверхность из выражения (17) для каждого интеграла. Введем функцию $t(x, y)$ такую, что $a = \alpha(t)$, $b = \beta(t)$, $t = t(x, y)$; здесь все функции непрерывно дифференцируемые. Функция $\psi(x, y)$, которая получается из (17) после подстановки этих функций, является (ср. с п. 9.5) снова интегралом уравнения (1), если

$$\psi_a(x, y; \alpha, \beta)\alpha' + \psi_b(x, y; \alpha, \beta)\beta' = 0 \tag{26}$$

для $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t = t(x, y)$. Она содержит начальную полосу (23), если

$$\left.\begin{aligned} \omega_3(\tau) &= \psi(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)), \\ \omega_4(\tau) &= \psi_x(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)), \\ \omega_5(\tau) &= \psi_y(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

---

[1]) Если задать вместо начальной полосы некоторую начальную кривую для интегральной поверхности, то ее можно дополнить до начальной полосы (23), для которой справедливы равенства (24) и (25).

для $x=\omega_1(\tau)$, $y=\omega_2(\tau)$ и

$$t(\omega_1, \omega_2)=\tau. \tag{28}$$

Уравнения (27) служат для определения функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$; уравнения (26) и (28) — для определения функции $t(x, y)$.

Если соотношения (27) выполнены для $\tau=\tau_0$, $x=\omega_1(\tau_0)$, $y=\omega_2(\tau_0)$ и только для двух чисел a_0, b_0 вместо $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и если, кроме того,

$$F_p(\omega_1(\tau_0), \ldots, \omega_5(\tau_0))\neq 0, \quad \psi_a\neq 0, \quad \psi_b\neq 0, \quad \psi_a\psi_{yb}-\psi_b\psi_{ya}\neq 0$$

или

$$F_q(\omega_1(\tau_0), \ldots, \omega_5(\tau_0))\neq 0, \quad \psi_a\neq 0, \quad \psi_b\neq 0, \quad \psi_a\psi_{xb}-\psi_b\psi_{xa}\neq 0$$

при $x=\omega_1(\tau_0)$, $y=\omega_2(\tau_0)$, $a=a_0$, $b=b_0$, то функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определяются однозначно из (27) как непрерывно дифференцируемые в окрестности τ_0 функции, удовлетворяющие условиям $\alpha(\tau_0)=a_0$, $\beta(\tau_0)=b_0$. Далее, еще нужно определить $t(x, y)$ из (26); тогда (28) удовлетворяется само собой.

Пример 1. $pq=z$.

В силу п. 9.2 (в), $z=(x-a)(y-b)$ — полный интеграл. Ищется интегральная поверхность, которая содержит интегральную полосу

$$x=0, \quad y=t, \quad z=t^2, \quad p=\frac{t}{2}, \quad q=2t.$$

Соотношения (24) и (25) удовлетворяются, а уравнения (27) имеют вид

$$t^2=-a(t-b), \quad \frac{t}{2}=t-b, \quad 2t=-a$$

и дают:

$$\alpha(t)=-2t, \quad \beta(t)=\frac{t}{2}.$$

Уравнение (26) имеет вид

$$2\left(y-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}(x+2t)=0$$

и дает:

$$t=y-\frac{x}{4}.$$

Таким образом,

$$\alpha=\frac{x}{2}-2y, \quad \beta=\frac{y}{2}-\frac{x}{8},$$

откуда получаем искомый интеграл

$$z=\left(y+\frac{x}{4}\right)^2.$$

Пример 2. $pq=axy$.

Дифференциальное уравнение допускает разделение переменных (см. п. 11.5); этим методом можно найти полный интеграл

$$z=Ax^2+\frac{a}{4A}y^2+B. \tag{*}$$

Ищется интегральная поверхность, которая содержит начальную кривую

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\omega(\eta),\ -\infty<\eta<+\infty,$$

и, следовательно, (см. примечание [1]) на стр. 99) начальную полосу

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\omega(\eta),\quad p=\frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)},\quad q=\omega'(\eta),$$

причем предполагается, что $\omega'(\eta)\neq 0$.

Если поставить A, B вместо α, β, то уравнения (27) примут вид

$$\omega(\eta)=A\xi^2+\frac{a}{4A}\eta^2+B,\quad \frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)}=2A\xi,\quad \omega'(\eta)=\frac{a}{2A}\eta$$

и, следовательно,

$$A=\frac{a\eta}{2\omega'(\eta)},\quad B=\omega(\eta)-\frac{a\xi^2\eta}{2\omega'(\eta)}-\frac{\eta}{2}\omega'(\eta), \qquad (**)$$

а уравнение (26) переписывается так:

$$(\eta\omega''-\omega')\left[a\eta^2(x^2-\xi^2)-(y^2-\eta^2)\omega'^2\right]=0. \qquad (***)$$

Если $\eta\omega''-\omega'\neq 0$, то нужно определить η как функцию от x, y:

$$\alpha\eta^2(x^2-\xi^2)=(y^2-\eta^2)\omega'^2,$$

и подставить в соотношения (**) и (*). Так, например, для $\omega(\eta)\equiv\eta$ получают:

$$z=y\sqrt{a(x^2-\xi^2)+1}.$$

Если же $\eta\omega''-\omega'=0$, то $\omega=\alpha\eta^2+\beta$ с произвольными константами α, β. Дифференциальные уравнения (***) здесь не могут служить для определения $\eta=\eta(x, y)$, но теперь из (**) получают:

$$A=\frac{a}{4\alpha},\quad B=\beta-\frac{a}{4\alpha}\xi^2,$$

и, таким образом, искомым интегралом, как подтверждает проверка, служит функция

$$z=\frac{a}{4\alpha}(x^2-\xi^2)+\alpha y^2+\beta.$$

§ 10. Некоторые другие методы решения

10.1. Нормальная задача Коши [1]**.** Под *задачей Коши* для дифференциального уравнения

$$F(x, y, z, p, q)=0 \qquad (1)$$

понимают задачу нахождения интегральной поверхности $z=\psi(x, y)$, содержащей данную интегральную полосу

$$x=\omega_1(s),\quad y=\omega_2(s),\quad z=\omega_3(s),\quad p=\omega_4(s),\quad q=\omega_5(s). \qquad (2)$$

[1]) См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921, стр. 20.

Здесь $\omega_\nu(s)$ — непрерывно дифференцируемые при $\alpha < s < \beta$ функции. О функции F снова делаются предположения, уже сформулированные в п. 8.1. Далее, пусть

$$F_p(\omega_1, \ldots, \omega_5)\,\omega_2' - F_q(\omega_1, \ldots, \omega_5)\,\omega_1' \neq 0, \tag{3}$$

это неравенство означает, что если кривая-носитель полосы (2) и кривая-носитель характеристической полосы § 8, (6) проектируется на плоскость x, y, то проекция первой не должна касаться проекции второй. Наконец, условимся обозначать интегральный элемент, определяемый полосой (2) для $s = s_0$, через x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

Из условия (3) следует, в частности, что полоса (2) содержит только правильные интегральные элементы (см. п. 8.6) и $|\omega_1'| + |\omega_2'| > 0$. В случае, если $\omega_2'(s) \neq 0$ [1]), это неравенство справедливо также и в окрестности этой точки; в этом случае можно преобразовать задачу Коши (1), (2) в *«нормальную задачу Коши»* специального вида [2]):

$$p = f(x, y, z, q), \quad x = 0, \quad y = \eta, \quad z(0, y) = 0. \tag{4}$$

Для выполнения этого преобразования уравнение $\eta = \omega_2(s)$ разрешают относительно s и выбирают η в качестве независимого переменного. Тогда начальные условия (2) переписываются в виде

$$x = \rho(\eta), \quad y = \eta, \quad z = \sigma(\eta), \quad p = \tau(\eta), \quad q = \omega(\eta). \tag{5}$$

Если теперь подвергнуть непрерывно дифференцируемую функцию $z(x, y)$ преобразованию

$$Z(X, Y) = z(x, y) - \sigma(y), \quad X = x - \rho(y), \quad Y = y,$$

то из дифференциального уравнения (1) получится уравнение

$$F(X + \rho(Y),\ Y,\ Z + \sigma(Y),\ Z_X,\ Z_Y - Z_X\rho'(Y) + \sigma'(Y)) = 0$$

для Z, которое, благодаря условию (3), можно разрешить относительно Z_X. При этом получится первое из уравнений (4) с большими буквами вместо маленьких. Из трех первых уравнений (5) получаются последние три уравнения (4); последнее уравнение (5) переходит в уравнение $Z_Y(0, Y) = 0$, вытекающее из последнего уравнения (4); предпоследнее уравнение (5) представляет собой следствие первого уравнения (4).

---

[1]) Если $\omega_1'(s_0) \neq 0$, а $\omega_2'(s_0) = 0$, то следует поступать аналогичным образом.

[2]) Под нормальной задачей понимается начальная задача, которая включает в себя дифференциальное уравнение в явной форме $p = f(x, y, z, q)$ и некоторое начальное условие $x = \xi$, $y = \eta$, $z(\xi, \eta) = \omega(\eta)$ при фиксированном ξ и переменном η, или же $q = f(x, y, z, p)$ и $x = \xi$, $y = \eta$, $z(\xi, \eta) = \omega(\xi)$ при фиксированном η и переменном ξ.

10.2. Общая теорема существования. Метод характеристик Коши [1]**.** В § 9 были уже изложены некоторые методы, с помощью которых в ряде случаев можно решить данное дифференциальное уравнение (1). Однако там ничего не сказано о том, при каких общих условиях интеграл данного уравнения существует.

Следующая теорема существования относится к задаче Коши.

Пусть левая часть $F(x, y, z, p, q)$ уравнения (1) — дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$. Пусть при $\alpha < s < \beta$

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s) \tag{6}$$

— интегральная полоса дифференциального уравнения (1) [2], для которой

$$F_p y_0'(s) - F_q x_0'(s) \neq 0, \tag{7}$$

причем в F_p и F_q подставлены функции (6) [3]. Тогда задача отыскания интегральной поверхности уравнения (1), содержащей полосу (6), разрешима «в малом»; более того, полученный интеграл даже дважды непрерывно дифференцируем [4].

Получить этот интеграл — решение задачи Коши — можно следующим путем: поскольку функция F дважды непрерывно дифференцируема, то правые части характеристической системы § 8, (6) непрерывно дифференцируемы; следовательно, ее решение однозначно определено некоторыми начальными значениями x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $t = 0$. Пусть этими решениями будут:

$$x = x(t, x_0, \ldots, q_0), \ldots, q = q(t, x_0, \ldots, q_0).$$

В качестве упомянутых начальных значений выбираются элементы данной интегральной полосы (6), т. е. строятся функции

$$X(s, t) = x(t, x_0(s), \ldots, q_0(s)), \ldots, Q(s, t) = \\ = q(t, x_0(s), \ldots, q_0(s)).$$

Эти функции в области их существования дают исключительно интегральные элементы дифференциального уравнения (1). Благодаря условию (7), уравнения

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t)$$

---

[1] [См. Курант, стр. 88—91; Степанов, стр. 393—406. — *Прим. ред.*]

[2] Можно также исходить из некоторой непрерывно дифференцируемой пространственной кривой $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$ и — коль скоро это выполнено — так добавить непрерывно дифференцируемые функции $p_0(s)$, $q_0(s)$, чтобы функции (6) удовлетворяли условию полосы и уравнению (1).

[3] Относительно геометрической интерпретации (7) см. 10.1. Из неравенства (7) следует, что начальная полоса (6) содержит лишь регулярные плоскостные элементы.

[4] Существует ли только один интеграл — зависит от вида области.

в каждом подынтервале $\alpha < \alpha_0 \leqslant s \leqslant \beta_0 < \beta$ могут быть однозначно разрешены относительно s, t для всех достаточно малых t; получаем две функции $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. Подставляя эти две функции в соотношение $z = Z(s, t)$, мы получим искомый интеграл дифференциального уравнения (1).

Пример. $pq = 1$.

Пусть для этого дифференциального уравнения задана начальная интегральная полоса

$$x = s, \quad y = s^3, \quad z = 2s^2, \quad p = s, \quad q = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Из характеристических уравнений

$$x'(t) = q, \quad y'(t) = p, \quad z'(t) = 2pq, \quad p'(t) = 0, \quad q'(t) = 0$$

без труда определяется характеристика с начальным значением $x_0, \ldots, q_0$ при $t = 0$:

$$x = x_0 + q_0 t, \quad y = y_0 + p_0 t, \quad z = 2p_0 q_0 t + z_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0.$$

После подстановки уравнений начальной полосы получаем:

$$x = \frac{t}{s} + s, \quad y = st + s^3, \quad z = 2t + 2s^2, \quad p = s, \quad q = \frac{1}{s}.$$

Из второго и третьего уравнений получаем соотношение $z = 2\frac{y}{s}$, а из двух первых уравнений следует, что $y = xs^2$. Таким образом, искомым интегралом будет:

$$z = 2\sqrt{xy} \quad \text{для} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

10.3. Частный случай: $p = f(x, y, z, q)$. Если дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно одной из производных:

$$p = f(x, y, z, q) \tag{8}$$

и для него ищется интегральная поверхность, которая проходит через данную кривую, лежащую в плоскости, параллельной плоскости y, z [1]), то при надлежащих предположениях можно дать оценку области определения интеграла.

(а) Пусть в области

$$|x - \xi| < a, \quad y, \ z, \ q \text{ — любые}, \tag{9}$$

функция $f(x, y, z, q)$ дважды непрерывно дифференцируема. Далее, пусть ее частные производные не превосходят по абсолютной величине числа A $(A > 1)$. Пусть, наконец, функция $\omega(\eta)$ определена для всех η, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенству

$$|\omega'(\eta)| + |\omega''(\eta)| \leqslant B.$$

---

[1]) [См. п. 2.6 (б) и примечание [1]) на стр. 23. — *Прим. ред.*]

Тогда дифференциальное уравнение (8) имеет ровно одну интегральную поверхность $z=\psi(x, y)$, содержащую начальную кривую

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\omega(\eta), \quad -\infty<\eta<+\infty.$$

Эта поверхность существует по крайней мере в области

$$|x-\xi|<\min\left(a, \frac{1}{3A(B+1)}\right), \quad -\infty<y<+\infty,$$

и там дважды непрерывно дифференцируема.

Эту интегральную поверхность получают методом характеристик Коши. Определяем для характеристических уравнений

$$y'(x)=-f_q, \quad z'(x)=f-qf_q, \quad q'(x)=f_y+qf_z \tag{10}$$

интегральные кривые

$$y=Y(x, \eta), \quad z=Z(x, \eta), \quad q=Q(x, \eta), \tag{11}$$

проходящие через начальные точки $(x=\xi,\ y=\eta,\ z=\omega(\eta),\ q=\omega'(\eta))$, и разрешаем первое из уравнений (11) относительно η: получаем функцию $\eta=\chi(x, y)$. Тогда $z=Z(x, \chi(x, y))$ — искомый интеграл; следовательно, иными словами, оба первых уравнения (11) дают этот интеграл в параметрическом представлении[1]).

(б) Если функция f задана не в области (9), а в какой-нибудь конечной области, то удается доказать аналогичную теорему существования в случае, когда область определения функции f можно так продолжить до области вида (9), чтобы там были выполнены предположения теоремы (а)[2]).

(в) Во многих случаях методом, изложенным в (а), получают интеграл даже в более широкой области, несмотря на то, что довольно сильные ограничения относительно производных функций f и ω иногда не выполнены.

Пример 1. $p=q^2$; $\omega(\eta)=\eta^2$.
Из характеристических уравнений

$$y'=-2q, \quad z'=-q^2, \quad q'=0$$

---

[1]) Камке, D. Glen, стр. 352—358; там предполагается еще, что $|f|<A$; это предположение не является необходимым, поскольку функция f оценивается по теореме о среднем через производные.

Другие результаты относительно области существования интеграла см. T. Ważewski, Annales Soc. Polon Math. **13** (1934), стр. 1—9; **14** (1935), стр. 149—177. По поводу предположений о дифференцируемости функций f и ω см. там же: **13** (1934), стр. 10—12; Math. Zeitschrift **43** (1938), стр. 521—532. Относительно однозначности интеграла см. A. Haar, Acta Szeged **4** (1928), стр. 103—114. Исторические замечания содержатся у Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung III, S. 719 f.

[2]) См. Камке, D. Glen, стр. 359—362; T. Ważewski, Annales, Soc. Polon. **14** (1935), стр. 149—177.

следует:

$$q = 2\eta, \quad z = \eta^2 - 4(x-\xi)\eta^2, \quad y = \eta - 4(x-\xi)\eta.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\eta = \frac{y}{1-4(x-\xi)} \quad \text{для} \quad x-\xi < \frac{1}{4},$$

так что

$$z = \psi(x, y) = \frac{y^2}{1-4(x-\xi)}.$$

Пример 2. $p = \ln q \ (q > 0)$; $\omega(\eta) = \eta^2 \ (\eta > 0)$.

Из характеристических уравнений

$$y' = -\frac{1}{q}, \quad z' = \ln q - 1, \quad q' = 0$$

следует:

$$q = 2\eta, \quad z = (\ln 2\eta - 1)(x-\xi) + \eta^2, \quad y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\eta = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{x-\xi}{2}} \quad \text{для} \quad x - \xi < \frac{y^2}{2}$$

(квадратный корень надо брать положительным, чтобы $y = \eta$ для $x = \xi$). Отсюда находим для $x - \xi < \frac{y^2}{2}$ интеграл в параметрическом представлении

$$z = (\ln 2\eta - 1)(x-\xi) + \eta^2, \quad y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

10.4. Представление решения степенным рядом в случае аналитических функций[1]**.** Рассмотрим снова задачу с начальным условием для дифференциального уравнения (8). Встречающиеся функции и переменные могут быть теперь комплексными.

Пусть в окрестности точки (x_0, y_0, z_0, q_0) функция $f(x, y, z, q)$ является аналитической функцией комплексных переменных x, y, z, q, т. е. она разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(x, y, z, q) = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \nu} a_{\varkappa, \lambda, \mu, \nu} (x-x_0)^\varkappa (y-y_0)^\lambda (z-z_0)^\mu (q-q_0)^\nu.$$

Далее, пусть $\omega(y)$ в окрестности значения $y = y_0$ — регулярная функция комплексного переменного y и

$$\omega(y_0) = z_0, \quad \omega'(y_0) = q_0.$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) дифференциальное уравнение (8) имеет ровно одно решение $z = \psi(x, y)$, которое

---

[1]) См. J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, Berlin und Leipzig, 1929, стр. 161—166; O. Perron, Math. Zeitschrift 5 (1919), стр. 154—160.

в этой окрестности является аналитической функцией, т. е. представляется абсолютно сходящимся рядом

$$\psi(x, y) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu}(x - x_0)^\mu (y - y_0)^\nu,$$

и которое при $x = x_0$ принимает значение

$$\psi(x_0, y) = \omega(y). \tag{12}$$

Коэффициенты $c_{\mu, \nu}$ искомой функции z можно записать так:

$$c_{\mu, \nu} = \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}\right)_0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где индекс «0» означает, что производная вычислена при значениях $x = x_0$, $y = y_0$. Но из начального условия (12) следует, что

$$\left(\frac{\partial^\nu z}{\partial y^\nu}\right)_0 = \omega^{(\nu)}(y_0),$$

а из уравнения (8) находим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = f(x_0, y_0, z_0, q_0),$$

или, после ν-кратного дифференцирования по y,

$$\left(\frac{\partial^{1+\nu} z}{\partial x\, \partial y^\nu}\right)_0 = \left(\frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)\right)_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Дифференцируя соотношение (8) по x и затем ν раз по y, получаем $\left(\frac{\partial^{2+\nu} z}{\partial x^2\, \partial y^\nu}\right)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, мы можем получить значения всех производных функций z в точке (x_0, y_0) и тем самым найти все коэффициенты $c_{\mu, \nu}$ разложения интеграла $\psi(x, y)$.

10.5. Более общие разложения в ряды[1]**.** Переменные теперь снова предполагаются действительными. Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно одной из производных:

$$p = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\mu, \nu}(x, y)\, z^\mu q^\nu; \tag{13}$$

отыскивается интеграл этого уравнения, который при $x = 0$ равен данной функции $\omega(y)$.

Формально процесс решения проходит так. Подставим

$$z = \sum_{\rho=1}^{\infty} \varphi_\rho(x, y) \tag{14}$$

[1]) См. O. Perron, Sitzungsberichte, Heidelberg, 1920, Abh. 9.

в дифференциальное уравнение (13); при этом пусть

$$\varphi_1(0,\ y)=\omega(y);\quad \varphi_\rho(0,\ y)=0 \quad \text{для} \quad \rho\geqslant 2; \tag{15}$$

тогда функция z заведомо удовлетворяет начальному условию. После подстановки (14) в (13) и проведения необходимых выкладок получаем:

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x}=\sum\frac{\mu!}{\mu_1!\ldots\mu_r!}\,\frac{\nu!}{\nu_1!\ldots\nu_s!}\,f_{\mu,\nu}\varphi_1^{\mu_1}\ldots\varphi_r^{\mu_r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^{\nu_1}\ldots\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}\right)^{\nu_s}. \tag{16}$$

Здесь суммирование производится по всем числам $\mu\geqslant 0$, $\nu\geqslant 0$, $\mu_1+\ldots+\mu_r=\mu$, $\nu_1+\ldots+\nu_s=\nu$. Правая часть уравнения (16) после упорядочения приводится к следующему виду:

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x}=\sum_{\rho=1}^{\infty}\omega_\rho(x,\ y), \tag{17}$$

при этом в каждом слагаемом ω_ρ должно быть собрано конечное или бесконечное число членов правой части уравнения (16) таким образом, чтобы ω_1 не содержало функций φ_ρ, а каждое ω_ρ содержит лишь функции $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{\rho-1}$.

Уравнение (17) (а вместе с ним и уравнение (13)) формально выполняется, когда функции φ_ρ выбраны так, что

$$\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x}=\omega_\rho,\quad \rho=1,\ 2,\ \ldots$$

Прежде всего имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\omega_1(x,\ y),\quad \text{где}\quad \omega_1(x,\ y)=f_{00}(x,\ y),$$

откуда, в силу (15), получается:

$$\varphi_1(x,\ y)=\int_0^x f_{00}(x,\ y)\,dx+\omega(y).$$

Теперь на основании (16) может быть найдена функция ω_2; она зависит только от $\varphi_1(x,\ y)$ и потому дает возможность определить

$$\varphi_2=\int_0^x\omega_2\,dx.$$

Далее может быть вычислена ω_3; так как она зависит, самое большее, от уже известных теперь φ_1, φ_2, то можно найти

$$\varphi_3=\int_0^x\omega_3\,dx.$$

Продолжая таким образом, мы получим формальное решение (14).

Этот метод приводит к истинному решению, т. е. ряд (14) равномерно сходится[1]) в области

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \tag{18}$$

и удовлетворяет там уравнению (13), если выполняются следующие условия:

(α) функции $f_{\mu, \nu}(x, y)$, $F_{\mu, \nu}(x, y)$ непрерывны в области (18), имеют там непрерывные частные производные любого порядка по y, причем для них выполнены неравенства

$$\left|\frac{\partial^n f_{\mu, \nu}}{\partial y^n}\right| \leqslant \frac{\partial^n F_{\mu, \nu}}{\partial y^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

стоящие справа производные растут (или постоянны) монотонно по x при фиксированном y;

(β) функции $\omega(y)$, $\Omega(y)$ непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз при $0 \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяют неравенству

$$|\omega^{(n)}(y)| \leqslant \Omega^{(n)}(y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

(γ) дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\mu, \nu}(x, y)\, z^{\mu} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\nu}$$

имеет в области (18) интеграл $z(x, y)$ с непрерывными частными производными

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющий условиям

$$z(0, y) = \Omega(y), \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial z}{\partial x} \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В частности, для специального вида функций

$$F_{\mu, \nu}(x, y) = \binom{\mu + \nu}{\nu} \frac{A b^{\nu}}{c^{\mu+\nu}\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\mu+1}}$$

---

[1]) Выполняются также равенства

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \sum_{\rho} \frac{\partial^n \varphi_{\rho}}{\partial y^n}, \qquad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n\, \partial x} = \sum_{\rho} \frac{\partial^{n+1} \varphi_{\rho}}{\partial y^n\, \partial x};$$

стоящие в их правых частях ряды сходятся также равномерно.

получаем: если коэффициенты $f_{\mu,\nu}(x, y)$ непрерывны и области (18), имеют там непрерывные частные производные любого порядка по y и если, кроме того, для $c > 0$ и $A > 0$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial^n f_{\mu,\nu}}{\partial y^n}\right| \leqslant \binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu+n}{n}\frac{An!\,b^{\nu-n}}{c^{\mu+\nu}\left(1-\frac{y}{b}\right)^{\mu+n+1}},$$

то описанный выше метод дает при $\omega(y) \equiv 0$ интеграл (14), обращающийся в нуль при $x = 0$ и существующий в области

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha(y), \quad \alpha(y) = \min\left\{a, \frac{c}{8A}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\right\}; \quad 0 \leqslant y < b.$$

Упомянутые выше предположения выполняются, в частности, если для коэффициентов $f_{\mu,\nu}$ существует разложение

$$f_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{(k)}(x)\,y^k, \quad |f_{\mu,\nu}^{(k)}| \leqslant \binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu+k}{k}\frac{Ab^{\nu-k}}{c^{\mu+k}}.$$

Пример. $p = q^2$; $z(0, y) = e^y$.

Если искать интеграл z в виде

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_\nu(y)\,x^\nu; \quad \omega_0 = e^y,$$

то получается ряд

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu e^{(\nu+1)y}; \tag{19}$$

здесь

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = \frac{16}{3}, \quad c_4 = \frac{50}{3}, \ \ldots,$$

$$(\nu+1)\,c_{\nu+1} + 1 = \sum_{r+s=\nu} (r+1)(s+1)\,c_r c_s.$$

Ряд (19) сходится по крайней мере для $|xe^y| < \frac{1}{8}$.

10.6. Методы решения.

(а) Если никаких начальных условий не дано, то для отыскания интегралов уравнения (1) можно применить метод Лагранжа, который состоит в том, чтобы попытаться получить нетривиальный первый интеграл (см. п. 9.1) и действовать дальше, согласно п. 9.3, или, если удается получить два таких первых интеграла, согласно п. 9.2. На этом пути можно получить даже полный интеграл. Для уравнений специальных видов можно использовать методы, излагаемые в § 11.

(б) Если требуется найти поверхность, проходящую через данную начальную кривую или через данную начальную полосу, то поступают следующим образом:

(α) если известен полный интеграл, то действуют согласно п. 9.6;

(β) можно использовать метод п. 10.2; при известных условиях можно ограничиться приближенным решением характеристических уравнений и получить искомую интегральную поверхность приближенно;

(γ) особые интегралы находятся в соответствии с п. 8.8 (б);

(δ) приближенное решение может быть найдено также использованием развитого в пп. 10.4, 10.5 метода разложения в ряды.

§ 11. Решение частных видов нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными

11.1. $F(x, y, z, p)=0$ и $F(x, y, z, q)=0$. С первым уравнением можно обращаться как с обыкновенным дифференциальным уравнением[1]) с независимой переменной x и параметром y. Вместо постоянной интегрирования в этом случае в ответе появится произвольная непрерывно дифференцируемая функция от y. Второе уравнение рассматривается аналогично.

11.2. $F(p, q)=0$. Для каждой пары чисел a, b, которые удовлетворяют уравнению $F(a, b)=0$, плоскость

$$z=ax+by+c$$

при любом c является интегралом. Если функция F дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $p=a_0$, $q=b_0$ и если, кроме того, $|F_p|+|F_q|>0$, то эти плоскости для всех значений a, b, лежащих достаточно близко к точке (a_0, b_0), составляют полный интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения.

Из характеристических уравнений

$$x'(t)=F_p,\quad y'(t)=F_q,\quad z'(t)=pF_p+qF_q,\quad p'(t)=0,\quad q'(t)=0$$

находим характеристику, проходящую при $t=0$ через плоскостной элемент x_0, y_0, z_0, a, b:

$$\left.\begin{aligned} &p=a,\quad q=b,\\ &x-x_0=F_p(a, b)\,t,\quad y-y_0=F_q(a, b)\,t,\\ &z-z_0=(aF_p+bF_q)\,t. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Если $|F_p(a, b)|+|F_q(a, b)|>0$, то эта характеристика — прямая

---

[1]) [Не разрешенным относительно производной; см., например, Степанов, стр. 104—139. — *Прим. ред.*]

линия, принадлежащая плоскости

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)_0.$$

Таким образом, регулярными интегральными поверхностями являются все непрерывно дифференцируемые поверхности $z = \psi(x, y)$, которые могут быть построены из таких прямых (1), причем выполнено дополнительное условие $F(a, b) = 0$. Эти интегральные поверхности — развертывающиеся поверхности. Если ограничиться дважды непрерывно дифференцируемыми интегральными поверхностями, то мы не получим никаких других регулярных поверхностей.

Наконец, надо еще исследовать, имеются ли особые интегральные поверхности, содержащие отдельные особые элементы.

11.3. $F(z, p, q) = 0$. Для произвольных a, b, $|a| + |b| > 0$, сделаем подстановку:

$$z = \zeta(\xi), \quad \xi = ax + by.$$

Тогда $p = a\zeta'(\xi)$, $q = b\zeta'(\xi)$, и, таким образом, из дифференциального уравнения с частными производными получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(\zeta, a\zeta', b\zeta') = 0.$$

Разрешим его относительно $\zeta' : \zeta' = f(\zeta)$; тогда при $f \neq 0$

$$\int \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \xi + c = ax + by + c$$

— полный интеграл исходного уравнения.

Получающиеся решения — цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны плоскости x, y, поскольку решение z есть функция только $ax + by$.

Пример. $9(p^2z + q^2) = 4$.

Указанная выше подстановка дает:

$$3\zeta'\sqrt{a^2\zeta + b^2} = \pm 2,$$

откуда получаем:

$$(a^2\zeta + b^2)^{\frac{3}{2}} = \pm a^2(\xi + c) \quad \text{при} \quad a \neq 0,$$

$$\zeta = \pm \frac{2\xi}{3b} + c \quad \text{при} \quad a = 0,$$

и, следовательно, решения имеют вид соответственно

$$(a^2z + b^2)^3 = a^4(ax + by + c)^2, \quad z = \pm \frac{2}{3}y + c.$$

11.4. $p = f(x, q)$ **и** $q = g(y, p)$. Если в первом уравнении рассмотреть q как параметр: $q = a$, то получится полный интеграл

$$z = \int f(x, a)\, dx + ay + b.$$

Аналогично полный интеграл второго уравнения записывается так

$$z = \int g(y, a)\, dy + ax + b.$$

Эти полные интегралы являются цилиндрами с образующими параллельными плоскостями yz и xz соответственно.

11.5. $f(x, p) = g(y, q)$ **и** $F[f(x, p\varphi(z)),\ g(y, q\varphi(z))] = 0$. Эти дифференциальные уравнения — с *разделяющимися переменными*.

При решении первого дифференциального уравнения полагают:

$$f(x, p) = a, \quad g(y, q) = a$$

для любой постоянной a и решают эту систему дифференциальных уравнений; получается полный интеграл исходного уравнения. Другая форма этого метода: выполняется подстановка $z = u(x) + v(y)$; тогда для u, v получают обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f(x, u') = a, \quad g(y, v') = a.$$

Метод п. 9.3 приводит к такому же результату.

О решении второго, более общего дифференциального уравнения см. п. 13.3.

11.6. $f(x, p) + g(y, q) = z$. После подстановки $z = u(x) + v(y)$ получают:

$$f(x, u'(x)) - u(x) = v(y) - g(y, v'(y)).$$

Решив обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f(x, u') - u = a, \quad v - g(y, v') = a$$

с произвольным a, мы получим для данных дифференциальных уравнений полные интегралы.

11.7. $p = f\left(\frac{y}{x}, q\right)$ **и** $F\left(\frac{y}{x}, p, q, xp + yq - z\right) = 0$. Первое из этих дифференциальных уравнений — частный случай второго.

Из характеристических уравнений следует:

$$xp'(t) + yq'(t) = 0$$

и, далее,

$$\frac{d}{dt}(z - xp - yq) = 0,$$

т. е. $z - xp - yq$ — первый интеграл. Поэтому, согласно п. 9.3, получают интегралы данных дифференциальных уравнений, разрешая оба уравнения

$$xp + yq = z + a, \quad F\left(\frac{y}{x}, p, q, a\right) = 0$$

относительно p, q и вычисляя по ним z.

11.8. $F(xp+yq, z, p, q) = 0$. Из характеристических уравнений следует, что q/p — первый интеграл. Следовательно, согласно п. 9.3, получаем полный интеграл данного дифференциального уравнения, решая систему дифференциальных уравнений

$$F(p(x+ay), z, p, ap) = 0, \quad q = ap.$$

11.9. $p^2 + q^2 = f(x^2 + y^2, yp - xq)$. Из характеристических уравнений вытекает, что $yp - xq$ — первый интеграл. В силу п. 9.3, полагая $yp - xq = a$, можно определить z из соотношений

$$p = \frac{ay}{r} + \frac{xR}{r}, \quad q = -\frac{ax}{r} + \frac{yR}{r},$$

где

$$r = x^2 + y^2, \quad R^2 = rf(r, a) - a^2.$$

Отсюда получается полный интеграл

$$z = -a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \int \frac{R}{2r}\, dr + b.$$

Рассматриваемое дифференциальное уравнение можно также преобразовать к полярным координатам ρ, ϑ, положив

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \quad x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta.$$

Тогда получается дифференциальное уравнение

$$\zeta_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\zeta_\vartheta'^{\,2} = f(\rho^2, -\zeta_\vartheta)$$

типа 11.4; отсюда при $\zeta_\vartheta = -a$ находим:

$$\zeta = -a\vartheta \pm \int \frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2 f(\rho^2, a) - a^2}\, d\rho + b.$$

11.10. $F[f(x)p, g(y)q, z] = 0$. После замены в этом уравнении переменных

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \eta = \int \frac{dy}{g(y)} \tag{2}$$

приходим к дифференциальному уравнению типа 11.3:

$$F(\zeta_\xi,\ \zeta_\eta,\ \zeta) = 0.$$

(а) $$\sum_{\nu=1}^{n} [f(x)\, p]^{\alpha_\nu} [g(y)\, q]^{\beta_\nu} h_\nu(z) = 0.$$

Заменой переменных (2) это уравнение приводится к виду

$$\sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\xi^{\alpha_\nu} \zeta_\eta^{\beta_\nu} h_\nu(\zeta) = 0.$$

Пример. $\left(\frac{p}{\cos^2 x}\right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y}\right)^b Z^c = Z^{\frac{ac}{a-b}}$.

Замена переменных

$$z(x,\ y) = \zeta(\xi,\ \eta), \quad \xi = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad \eta = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\sin 2y$$

приводит к уравнению

$$\zeta_\xi^a + \zeta_\eta^b \zeta^c = \zeta^{\frac{ac}{a-b}}. \tag{3}$$

(б) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p^{\alpha_\nu} q^{\beta_\nu} z^{\gamma_\nu} = 0,$ [1] $(\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu)\lambda - (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \delta$

для фиксированных (не зависящих от ν) чисел λ и δ.

Это — *однородное уравнение*. Замена $z = u^\lambda$ в случае, если все $a_\nu = \text{const}$, приводит к уравнению типа 11.2:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{\alpha_\nu + \beta_\nu} u_x^{\alpha_\nu} u_y^{\beta_\nu} = 0.$$

Если же $a_\nu = a_\nu(x,\ y)$, то та же замена приводит к уравнению типа 11.13.

Пример. Написанное выше дифференциальное уравнение (3) как раз рассматриваемого типа. Для $\lambda = \frac{a-b}{a-b-c}$, $\delta = \frac{ac}{a-b-c}$ и $\zeta = u^\lambda$ получаем:

$$\lambda^a u_\xi^a + \lambda^b u_\xi^b = 1.$$

(в) Если для дифференциального уравнения (б) имеет место условие: $\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu = \delta$ — фиксированное (не зависящее от ν) число, то это уравнение подстановкой $z = e^u$ приводится к типу 11.2:

$$\sum a_\nu u_x^{\alpha_\nu} u_y^{\beta_\nu} = 0.$$

11.11. $f(p,\ q) = xp + yq$; f однородна по p, q. Пусть $f(p,\ q)$ — однородная функция n-й степени.

---

[1]) Обобщением этого уравнения является случай 13.4.

Два последних характеристических уравнения § 8, (6) данного дифференциального уравнения имеют вид $p'=p$, $q'=q$. Отсюда следует, что $\frac{q}{p}$ — первый интеграл. Для $q=ap$ из дифференциального уравнения получается соотношение

$$f(p,\ ap)=xp+ayp,$$

т. е.

$$p^{n-1}f(1,\ a)=x+ay,$$

и, следовательно,

$$q=ap,\quad p=\left(\frac{x+ay}{f(1,\ a)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Таким образом,

$$z=\frac{n-1}{n}\left(\frac{x+ay}{f(1,\ a)}\right)^{\frac{n}{n-1}}f(1,\ a)+b$$

— полный интеграл.

11.12. $z=xp+yq+f(p,\ q)$ **и** $F(p,\ q,\ z-xp-yq)=0$. Это — *дифференциальные уравнения Клеро* [1]).

Если функция $F(u,\ v,\ w)$ определена в точке $(a,\ b,\ c)$ и равна в ней нулю: $F(a,\ b,\ c)=0$, то $z=ax+by+c$, очевидно, является решением второго дифференциального уравнения.

Если второе дифференциальное уравнение разрешить относительно $z-xp-yq$, то тем самым оно сведется к первому дифференциальному уравнению.

Дифференциальное уравнение

$$z=xp+yq+f(p,\ q) \tag{4}$$

имеет для каждых двух чисел a и b, таких, что значение $f(a,\ b)$ определено, интеграл

$$z=ax+by+f(a,\ b). \tag{5}$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то эти плоскости составляют полный интеграл.

(а) Если при фиксированном a производная $f_{vv}(a,\ v)\neq 0$ в некотором интервале $v_1<v<v_2$, то

$$y=-f_v(a,\ v),\quad z=ax+vy+f(a,\ v)$$

— параметрическое представление интеграла. Если при фиксированном b производная $f_{uu}(u,\ b)\neq 0$ в некотором интервале $u_1<u<u_2$, то интеграл имеет вид

$$x=-f_u(u,\ b),\quad z=ux+by+f(u,\ b).$$

---

[1]) [См. Курант, стр. 102—103. — *Прим. ред.*]

(б) Пусть функция $f(u, v)$ непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(u, v)$; пусть, далее,

$$\frac{\partial (f_u, f_v)}{\partial (u, v)} \neq 0$$

и область $\mathfrak{G}(u, v)$ однозначно отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(x, y)$ функциями

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v).$$

Тогда дифференциальное уравнение (4) имеет в области $\overline{\mathfrak{G}}(x, y)$ нелинейный интеграл, который параметрически задается уравнениями

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v), \quad z = ux + vy + f(u, v)$$

(особый интеграл). Он, однако, иногда не существует (см. пример, ч. II, 6.7).

Каждая развертывающаяся поверхность, имеющая на каждой своей прямой точку касания с особой интегральной поверхностью, является интегральной поверхностью. Поверхность, проходящую через данную начальную кривую, геометрически получают так: определяют плоскости, которые одновременно касаются начальной кривой и особой поверхности, и затем строят огибающую их поверхность.

11.13. $F(x, y, p, q) = 0$. Характеристические уравнения § 8, (6) без «условия полосы» имеют вид

$$x'(t) = F_p, \quad y'(t) = F_q, \quad p'(t) = -F_x, \quad q'(t) = -F_y. \tag{6}$$

Это — так называемые канонические уравнения (см. п. 12.10); они образуют разрешимую систему. Если решение этих уравнений (6) найдено, то из условия полосы

$$z'(t) = p(t)\, x'(t) + q(t)\, y'(t)$$

можно затем получить недостающую функцию $z(t)$ квадратурами.

Если известно однопараметрическое семейство интегралов $z = \psi(x, y, a)$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по всем трем аргументам, и если, кроме того, $|\psi_{ax}| + |\psi_{ay}| > 0$, то функция $z = \psi(x, y, a) + b$ является полным интегралом, а характеристические кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi_a = \text{const}. \tag{7}$$

Свойство (7) находит применение при решении уравнений движения механики (см. ч. II, 6.65).

11.14. $F(x, y, z, p, q)=0$. Преобразование Лежандра [1]). Пусть функция $z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y)$, пусть

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \not\equiv 0 \text{ ни в какой подобласти области } \mathfrak{G}, \tag{8}$$

и пусть область $\mathfrak{G}(X, Y)$ взаимно однозначно отображается функциями

$$X=z_x(x, y), \quad Y=z_y(x, y) \tag{9}$$

на область $\overline{\mathfrak{G}}(X, Y)$. Если сделать замену

$$Z(X, Y)=xz_x+yz_y-z, \tag{10}$$

то Z по-прежнему будет иметь в области $\overline{\mathfrak{G}}$ непрерывные частные производные второго порядка. Преобразование

$$x=Z_X, \quad y=Z_Y, \quad z=XZ_X+YZ_Y-Z \tag{11}$$

называется *преобразованием Лежандра* (*дуальным преобразованием*).

С его помощью (поскольку для интеграла выполняются указанные предположения) дифференциальное уравнение

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{12}$$

переходит в уравнение

$$F(Z_X, Z_Y, XZ_X+YZ_Y-Z, X, Y)=0, \tag{13}$$

которое иногда проще первоначального дифференциального уравнения (12). Если $Z=Z(X, Y)$ — интеграл уравнения (13), то соотношения (11) дают параметрическое представление соответствующего интеграла $z(x, y)$ дифференциального уравнения (12).

При преобразовании (11) некоторые интегралы могут пропадать. Например, в дифференциальном уравнении Клеро (4) пропадают плоские интегральные поверхности (5), потому что для них не выполняется неравенство (8). По этой же причине пропадают [2]) развертывающиеся поверхности в п. 11.12 (а). Напротив, в п. 11.12 (б) преобразование Лежандра применимо. Преобразованное уравнение

$$Z=-f(X, Y)$$

уже не является дифференциальным, однако, непосредственно дает решение. Переходя к первоначальным переменным, получаем решение дифференциального уравнения Клеро в параметрическом виде

$$x=-f_X(X, Y), \quad y=-f_Y(X, Y), \quad z=xX+yY+f(X, Y),$$

совпадающее с указанным в п. 11.12 (б).

---

[1]) [См. Курант, стр. 43—49. — *Прим. ред.*]

[2]) О том, как получать интегралы, теряющиеся при этом методе решения, см. ч. II, 6.36.

11.15. $F(x, y, z, p, q) = 0$. Преобразование Эйлера. Пусть функция $z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y)$, пусть $z_{xx} \neq 0$, и пусть область $\mathfrak{G}(x, y)$ может быть посредством взаимно однозначного преобразования

$$X = z_x(x, y), \quad Y = y$$

отображена на область $\bar{\mathfrak{G}}(X, Y)$. Определим функцию

$$Z(X, Y) = xz_x - z;$$

она дважды непрерывно дифференцируема в области $\bar{\mathfrak{G}}$. Преобразование

$$X = z_x, \quad Y = y, \quad Z = xz_x - z, \quad Z_Y = -z_y$$

и обратное ему преобразование

$$x = Z_X, \quad y = Y, \quad z = XZ_X - Z, \quad z_y = -Z_Y$$

называются *преобразованием Эйлера.*

С помощью этого преобразования дифференциальное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

переходит (коль скоро интегралы удовлетворяют указанным предположениям) в дифференциальное уравнение

$$F(Z_X, Y, XZ_X - Z, X, -Z_Y) = 0,$$

которое иногда проще первоначального.

Если это преобразование применить к дифференциальному уравнению Клеро (4), то плоские интегральные поверхности (5) пропадают, потому что для них не выполняется неравенство $z_{xx} \neq 0$ (или $z_{yy} \neq 0$). Напротив, преобразование Эйлера в п. 11.12 (а) применимо и переводит уравнение Клеро в дифференциальное уравнение

$$Z = YZ_Y - f(X, -Z_Y),$$

которое может быть рассмотрено как обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром X и которое имеет решение

$$Z = -bY - f(X, b),$$

приводящее к выражению

$$z = xX + bY + f(X, b), \quad x = -f_X(X, b),$$

для интеграла уравнения Клеро, тождественному со вторым из решений, указанных в п. 11.12 (а).

11.16. $F(xp-z,\ y,\ p,\ q)=0$. Подстановка $z=Cx+u(y)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F(-u(y),\ y,\ C,\ u'(y))=0$$

для функции $u(y)$.

Для решений z, удовлетворяющих условию $z_{xx}\neq 0$, дифференциальное уравнение переводится преобразованием Эйлера в уравнение

$$F(Z,\ Y,\ X,\ -Z_Y)=0$$

типа 11.1.

11.17. $xf(y,\ p,\ xp-z)+qg(y,\ p,\ xp-z)=h(y,\ p,\ xp-z)$. Преобразованием Эйлера из данного нелинейного дифференциального уравнения получают квазилинейное уравнение

$$f(Y,\ X,\ Z)Z_X-g(Y,\ X,\ Z)Z_Y=h(Y,\ X,\ Z).$$

11.18. $qf(u)=xp-yq$; $xqf(u)=xp-yq$; $xf(u,\ p,\ q)+yg(u,\ p,\ q)=h(u,\ p,\ q)$, где $u=xp+yq-z$. Преобразованием Лежандра из этих нелинейных дифференциальных уравнений получают квазилинейные уравнения:

$$Yf(Z)-XZ_X+YZ_Y=0,$$
$$YZ_Xf(Z)-XZ_X+YZ_Y=0,$$
$$f(Z,\ X,\ Y)Z_X+g(Z,\ X,\ Y)Z_Y=h(Z,\ X,\ Y).$$

ГЛАВА III

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С n НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 12. Нелинейное уравнение с n независимыми переменными: $F(\mathbf{r}, z, \mathbf{p}) = 0$.

12.1. Общие понятия, обозначения и терминология. *Общее (нелинейное) дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для одной неизвестной функции* $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ *n независимых переменных имеет вид*

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

а уравнение, *разрешенное относительно одной из производных*, записывается в форме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \tag{2}$$

С помощью сокращенных обозначений

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

а также $\mathbf{r}$ для вектора с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, $\mathbf{y}$ — для $y_1, \ldots, y_n$, $\mathbf{p}$ — для $p_1, \ldots, p_n$ и $\mathbf{q}$ — для $q_1, \ldots, q_n$ уравнения (1), (2) можно записать короче:

$$F(\mathbf{r}, z, \mathbf{p}) = 0 \tag{1a}$$

и

$$p = f(x, \mathbf{y}, z, \mathbf{q}) = 0. \tag{2a}$$

О функциях F и f предполагается, что они в рассматриваемой области своих $2n+1$ (соответственно $2n+2$) переменных непрерывно дифференцируемы.

Под *плоскостным элементом* здесь понимается система $2n+1$ чисел

$$x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n \text{ или, короче, } \mathbf{r}, z, \mathbf{p}; \tag{3}$$

первые $n+1$ чисел называются *носителем* плоскостного элемента, последние n чисел называют *направляющими коэффициентами* (ср. с п. 8.2).

Плоскостной элемент (3) называется *обыкновенным* (*регулярным, правильным*) или *особым* (*нерегулярным*) по отношению к дифференциальному уравнению (1), в зависимости от того (ср. с п. 8.6), будет ли в точке ($\boldsymbol{r}$, z, $\boldsymbol{p}$) $\sum_{\nu=1}^{n} |F_{p_\nu}| > 0$ или $F_{p_1} = \ldots = F_{p_n} = 0$. Очевидно, что для дифференциального уравнения (2) имеются только правильные плоскостные элементы.

Плоскостной элемент (3) называется *интегральным элементом* уравнения (1), если он (ср. с п. 8.7) удовлетворяет уравнению (1a). Функция $z = \psi(x, y)$ есть *интеграл* уравнения (1), если она непрерывно дифференцируема и если все плоскостные элементы, которые можно с ее помощью сконструировать,

$$x_1, \ \ldots, \ x_n, \ \psi, \ \psi_{x_1}, \ \ldots, \ \psi_{x_n} \tag{4}$$

или, короче [1]),

$$\boldsymbol{r}, \ \psi, \ \operatorname{grad}_x \psi \tag{4a}$$

являются интегральными элементами уравнения (1).

Об определениях *частного интеграла, общего интеграла* см. п. 8.8.

Интеграл $z = \psi(\boldsymbol{r})$ уравнения (1) называется *особым*, если он содержит только особые интегральные элементы поверхности (4), т. е. если величины (4) одновременно удовлетворяют $n+1$ уравнению [2])

$$F = 0, \quad F_{p_1} = 0, \ \ldots, \quad F_{p_n} = 0. \tag{5}$$

Подставим функцию ψ в уравнение (1) и продифференцируем получившееся соотношение частным образом по x_ν; тогда получится, что (дважды непрерывно дифференцируемый) особый интеграл, кроме $n+1$ уравнения (5), должен также удовлетворять еще n уравнениям

$$F_{x_\nu} + p_\nu F_z = 0, \quad \nu = 1, \ \ldots, \ n. \tag{6}$$

Следовательно, особые интегралы дифференциального уравнения (1) можно получить, найдя непрерывно дифференцируемые функции $z = \psi$, удовлетворяющие уравнениям (5), или дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнениям (5), (6).

---

1) [Если дана функция $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то $\operatorname{grad}_x F = \{F_{x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, F_{x_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ ее вектор-градиент по x. — *Прим. ред.*]

2) Отсюда ясно, что для дифференциального уравнения (2) особых интегралов не существует.

Полный интеграл уравнения (1) есть n-параметрическое семейство интегралов

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = \psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}), \tag{7}$$

здесь $\boldsymbol{a}$ означает вектор с компонентами $a_1, \ldots, a_n$) таких, что функция ψ вместе с производными ψ_{x_μ} в некоторой области пространства $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$ имеет непрерывные частные производные по всем $2n$ аргументам x_ν, a_ν, и функциональная матрица

$$\frac{\partial(\psi, \psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)} \tag{8}$$

в каждой точке рассматриваемой области имеет ранг n.

12.2. Характеристические полосы и интегральные поверхности. Под *полосой* (ср. п. 8.3) понимают однопараметрическое семейство плоскостных элементов

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad z = z(t), \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t), \tag{9}$$

таких, что эти вектор-функции непрерывно дифференцируемы по t в интервале $\alpha < t < \beta$ и выполняется *условие полосы* [1])

$$z'(t) = \boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{p}(t) \tag{10}$$

или подробнее

$$z'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu(t)\, p_\nu(t). \tag{10a}$$

Полоса называется *интегральной полосой* дифференциального уравнения (1), если она (ср. с п. 8.7) состоит только из интегральных элементов.

Характеристической полосой (*характеристикой*) дифференциального уравнения (1) называется (ср. с пп. 8.4, 8.5) полоса (9), которая удовлетворяет *характеристическим уравнениям* (*характеристической системе*)

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{P}, \quad z'(t) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{p}'(t) = -\boldsymbol{X} - F_z\boldsymbol{p}; \tag{11}$$

здесь

$$\boldsymbol{P} = (F_{p_1}, \ldots, F_{p_n}) = \operatorname{grad}_p F, \quad \boldsymbol{X} = (F_{x_1}, \ldots, F_{x_n}) = \operatorname{grad}_x F. \tag{12}$$

Первые n этих уравнений образованы по аналогии с § 8, (6); $(n+1)$-е уравнение есть условие полосы (10); последние n уравнений получаются (ср. с п. 8.4) из условия, чтобы полоса (4) принадлежала интегральной поверхности $z = \psi$.

[1]) Это условие является необходимым для того, чтобы плоскостной элемент (9) принадлежал некоторой непрерывно дифференцируемой поверхности $z = \psi(\boldsymbol{r})$. [Символ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ означает скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. — *Прим. ред.*]

Для дифференциального уравнения (2) в качестве характеристических уравнений берутся уравнения

$$y'(x) = -\boldsymbol{Q}, \quad z'(x) = f - \boldsymbol{q}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{q}'(x) = \boldsymbol{Y} + f_z \boldsymbol{q}; \qquad (13)$$

здесь

$$\boldsymbol{Q} = (f_{q_1}, \ldots, f_{q_n}) = \operatorname{grad}_q f, \quad \boldsymbol{Y} = (f_{y_1}, \ldots, f_{y_n}) = \operatorname{grad}_y f.$$

(а) Функция $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ вдоль каждой характеристической полосы уравнения (1) постоянна; характеристическая полоса является интегральной полосой, если она содержит хотя бы один интегральный элемент (ср. с п. 8.7); функция F есть (очевидный) первый интеграл (ср. с п. 9.1) уравнения (1).

(б) Если $z = \psi(\boldsymbol{r})$ — дважды непрерывно дифференцируемый в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ интеграл уравнения (1) и если

$$\boldsymbol{r}_0, \quad z_0 = \psi(\boldsymbol{r}_0), \quad \boldsymbol{p}_0 = (\operatorname{grad} \psi)_{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0} \qquad (14)$$

— произвольный плоскостной элемент этого интеграла, то все характеристические полосы, содержащие этот плоскостной элемент, принадлежат интегральной поверхности, коль скоро точки $\boldsymbol{r}$ этой характеристической полосы принадлежат области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$.

Таким образом, дважды непрерывно дифференцируемые интегральные поверхности могут быть построены из характеристик.

(в) Если $z = \psi(\boldsymbol{r})$ и $z = \chi(\boldsymbol{r})$ в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ — два интеграла дифференциального уравнения (1) с общим плоскостным элементом (14) и если функции ψ, χ дважды непрерывно дифференцируемы, то все характеристические полосы уравнения (1), содержащие плоскостной элемент (14), одновременно принадлежат обеим интегральным поверхностям, если только точка $\boldsymbol{r}(t)$ принадлежит области $\mathfrak{G}$.

Если этот общий плоскостной элемент регулярный, то обе интегральные поверхности имеют общую кривую, не вырождающуюся в точку.

12.3. Сведе́ние уравнения к такому, которое содержит лишь производные искомой функции.

(а) Пусть $w = \varphi(\boldsymbol{r}, z)$ — непрерывно дифференцируемая функция $n+1$ независимого переменного $x_1, \ldots, x_n$, z и $z = \psi(\boldsymbol{r})$ — непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \psi(\boldsymbol{r})) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_z(\boldsymbol{r}, \psi(\boldsymbol{r})) \neq 0\,[1].$$

Если $z = \psi(\boldsymbol{r})$ — интеграл дифференциального уравнения (1), то из соотношения $\varphi(\boldsymbol{r}, \psi(\boldsymbol{r})) = 0$ после частного дифференцирования следует:

$$\varphi_{x_\nu} + \varphi_z \psi_{x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

[1]) Для каждого интеграла $z = \psi$ функция с такими свойствами всегда существует, например, $\varphi = z - \psi$.

т. е. для $z=\psi$ справедливо равенство

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_z}, \ldots, -\frac{\varphi_{x_n}}{\varphi_z}\right)=0.$$

Если, обратно, $w=\varphi(\boldsymbol{r}, z)$ при $\varphi_z \neq 0$ — интеграл дифференциального уравнения

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, -\frac{w_{x_1}}{w_z}, \ldots, -\frac{w_{x_n}}{w_z}\right)=0 \qquad (15)$$

и если равенство $\varphi=0$ справедливо для непрерывно дифференцируемой функции $z=\psi(\boldsymbol{r})$, т. е. $\varphi(\boldsymbol{r}, \psi(\boldsymbol{r}))\equiv 0$, то ψ — интеграл уравнения (1)[1]).

Итак, находя интегралы $\varphi(\boldsymbol{r}, z)$ уравнения (15), удовлетворяющие условию $\varphi_z \neq 0$, и разрешая относительно z уравнение $\varphi=0$, мы получаем интегралы уравнения (1)[2]).

Дифференциальное уравнение (15) уже больше не содержит саму искомую функцию w.

Пример. $xypq=z$.

Преобразованное дифференциальное уравнение (15) имеет вид

$$xyw_xw_y - zw_z^2=0.$$

Из характеристических уравнений получаются первые интегралы: xw_x и yw_y. Следовательно, можно составить инволюционную систему

$$w_x=\frac{A}{x}, \quad w_y=\frac{B}{y}, \quad w_z=\sqrt{\frac{AB}{z}},$$

из которой находим

$$w=A\ln|x|+B\ln|y|+2\sqrt{ABz}+C.$$

Следовательно, искомые интегралы

$$z=\frac{1}{4AB}(A\ln|x|+B\ln|y|+C)^2.$$

(б) Пусть $u=u(\boldsymbol{r}, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция от $n+1$ независимого переменного, удовлетворяющая соотношению

$$u=tu_t+c \qquad (c \text{ — константа}), \qquad (16)$$

и $u_t=z$ — интеграл уравнения (1)[3]). Тогда функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u_t, \frac{u_{x_1}}{t}, \ldots, \frac{u_{x_n}}{t}\right)=0,$$

---

[1]) Для примера см. п. 5.4.

[2]) Можно ли этим способом получить все интегралы уравнения (1) — зависит от того, справедлива ли для уравнения (15) теорема существования, в силу которой для каждой непрерывно дифференцируемой функции $z=\psi(\boldsymbol{r})$ имеется интеграл $w=\varphi(\boldsymbol{r}, z)$ уравнения (15), который обращается в нуль для этих значений.

[3]) Если $z(\boldsymbol{r})$ — интеграл уравнения (1), то очевидно, что функция $u=tz(\boldsymbol{r})+\text{const}$ обладает требуемыми свойствами.

в которое сама функция u не входит[1]). Обратно, если u — интеграл этого уравнения и если уравнение (16) имеет непрерывно дифференцируемое решение $t=\chi(\mathbf{r})$, то $z=u_t(\mathbf{r}, \chi(\mathbf{r}))$ — интеграл уравнения (1).

Пример. Для приведенного в (a) примера преобразованное уравнение выглядит теперь так:

$$xyu_xu_y - t^2u_t = 0.$$

Оно снова имеет первые интегралы xu_x, yu_y. Следовательно, можно составить инволюционную систему

$$u_x = \frac{A}{x}, \quad u_y = \frac{B}{y}, \quad u_t = \frac{AB}{t^2},$$

из которой находим:

$$u = A\ln|x| + B\ln|y| - \frac{AB}{t} + C.$$

Уравнение (16) имеет вид

$$A\ln|x| + B\ln|y| + C = 2\frac{AB}{t}.$$

Если теперь найденное отсюда t подставить в соотношение $z = u_t = \dfrac{AB}{t^2}$, то для z снова получается выписанное выше в (a) выражение.

12.4. Представление решения степенным рядом в случае аналитических функций. Если встречающиеся функции и переменные — комплексные, то для дифференциального уравнения (2) имеет место обобщение теоремы п. 10.4.

Пусть в окрестности точки $(x_0, \mathbf{y}_0, z_0, \mathbf{q}_0)$ задана аналитическая функция $f(x, \mathbf{y}, z, \mathbf{q})$ своих $2n+2$ переменных. Пусть далее, $\omega(\mathbf{y})$ — аналитическая функция в окрестности значения $\mathbf{y}_0$, и пусть

$$z_0 = \omega(\mathbf{y}_0), \quad q_0 = (\operatorname{grad}\omega)_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) в достаточно малой окрестности точки $(x_0, \mathbf{y}_0)$ имеет ровно одно аналитическое решение $z = \psi(x, \mathbf{y})$, которое при $x = x_0$ принимает значение $\psi(x_0, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y})$.

Коэффициенты степенного ряда для ψ могут быть получены применением к ψ обычного метода степенных рядов и приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях с учетом начальных условий[2]).

12.5. Общая теорема существования. Метод характеристик Коши. Для дифференциального уравнения (1) можно доказать общую теорему существования (ср. с п. 10.2) с помощью *метода характеристик*

[1]) Этот метод сведéния уравнения (1) к уравнению, не содержащему неизвестной функции, известен под названием *метода Якоби — Майера.*

[2]) См. O. Perron, Math. Zeitschrift 5 (1919), стр. 154—160.

теристик Коши[1]). Для этого полезно обобщить понятие полосы, данное в п. 12.2.

(а) Под *k-мерной полосой* ($k \leqslant n$) понимается k-параметрическое семейство плоскостных элементов

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_1, \ldots, t_k), \quad z=z(t_1, \ldots, t_k), \quad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t_1, \ldots, t_k), \tag{17}$$

которое имеет следующие свойства:

(α) функции $\boldsymbol{r}$, z, $\boldsymbol{p}$ непрерывно дифференцируемы в области $H=H(t_1, \ldots, t_k)$;

(β) справедливо условие полосы

$$\frac{\partial z}{\partial t_\nu}=\boldsymbol{p}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_\nu}, \qquad \nu=1, \ldots, k; \tag{18}$$

(γ) матрица

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}$$

имеет в каждой точке области H ранг k.

Последнее условие есть выражение того, что полоса действительно k-мерна. Условие (18) является необходимым для того, чтобы плоскостные элементы (17) принадлежали непрерывно дифференцируемой поверхности $z=z(\boldsymbol{r})$. k-мерная полоса называется *интегральной k-мерной полосой* уравнения (1), если она содержит только интегральные элементы уравнения (1).

(б) n-мерная интегральная полоса определяет («в малом») дважды непрерывно дифференцируемый интеграл уравнения (1). Так как для нее определитель

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \neq 0,$$

то первые n из уравнений (17) могут быть однозначно разрешены относительно $t_1, \ldots, t_n$ в окрестности каждой точки $(t_{10}, \ldots, t_{n0})$, а потому функция $z(t_1, \ldots, t_n)$ превращается в непрерывно дифференцируемую функцию от $x_1, \ldots, x_n$ с частными производными $p_1, \ldots, p_n$, которые в свою очередь также непрерывно дифференцируемы (в силу (18)).

Таким образом, для дифференциального уравнения (1) существование интеграла «в малом» вытекает из существования n-мерной интегральной полосы.

(в) Пусть функция $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$. Пусть, далее,

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad z=z_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0(t_1, \ldots, t_{n-1}) \tag{19}$$

[1]) [См. Курант, стр. 105—111; Степанов, стр. 406—420. — *Прим. ред.*]

— данная $(n-1)$-мерная полоса дифференциального уравнения (1), определенная в области $H_{n-1}=H_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})$; полученные, согласно формулам (19), величины должны принадлежать области $\mathfrak{G}$. Наконец, пусть определитель

$$\begin{vmatrix} F_{p_1}, & \ldots, & F_{p_n}, \\ \dfrac{\partial x_{01}}{\partial t_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{0n}}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_{01}}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{0n}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{20}$$

здесь в функции F_{p_ν} первой строки подставлены функции (19), а $x_{0\nu}$ — компоненты вектора $\boldsymbol{r}_0(t_1, \ldots, t_n)=(x_{01}, \ldots, x_{0n})$.

Так как функция F дважды непрерывно дифференцируема, то правые части характеристических уравнений (11) непрерывно дифференцируемы. Их решение $\boldsymbol{r}(t)$, $z(t)$, $\boldsymbol{p}(t)$, следовательно, однозначно определено начальными значениями $\boldsymbol{r}_0$, z_0, $\boldsymbol{p}_0$, принимаемыми при $t=0$. Определим, далее, функции (будем писать t_n вместо t):

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R}(t_1, \ldots, t_n) &= \boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), z_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \ldots, t_{n-1})), \\ \mathscr{Z}(t_1, \ldots, t_n) &= z(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), z_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \ldots, t_{n-1})), \\ \mathscr{P}(t_1, \ldots, t_n) &= \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), z_0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \ldots, t_{n-1})). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Эти функции $\mathscr{R}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{P}$ образуют n-мерную интегральную полосу в области $H_n(t_1, \ldots, t_n)$, которая совпадает с областью H_{n-1} при $t_n=0$. Область H_n определена, так как для каждой точки $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ из H_{n-1} можно определить интеграл изменения переменной t_n, который содержит значение $t_n=0$ и в котором существует решение (21) характеристических уравнений (11).

12.6. Частный случай: $p=f(x, y, z, q)$. Если дано дифференциальное уравнение (2), то при надлежащих предположениях можно указать некоторые оценки для области существования решения (ср. с п. 10.3).

(а) Пусть функция $f(x, y, z, q)$ в области

$$|x-\xi| \leqslant a, \quad y, z, q \text{ — произвольны}, \tag{22}$$

дважды непрерывно дифференцируема по всем $2n+2$ аргументам, и пусть в этой области справедливы оценки

$$\left.\begin{array}{l} |f_x|,\ |f_{y_\nu}|,\ |f_z|,\ |f_{q_\nu}| \\ |f_{y_\mu y_\nu}|,\ |f_{y_\mu z}|,\ |f_{y_\mu q_\nu}|,\ |f_{zz}|,\ |f_{zq_\nu}|,\ |f_{q_\mu q_\nu}| \end{array}\right\} \leqslant A. \tag{23}$$

Пусть, далее, функция $\omega(\mathbf{y})$ дважды непрерывно дифференцируема по всем y_ν и удовлетворяет неравенству

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{n} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqslant B, \quad \mu = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Наконец, пусть определены числа

$$0 < \beta < \frac{1}{A} \ln\left(1 + \frac{\ln 3}{2n(B+1)}\right) \quad \text{и} \quad \alpha = \min(a, \beta). \tag{25}$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) имеет в области

$$|x-\xi| \leqslant \alpha, \qquad \mathbf{y} \text{ — произвольно}, \tag{26}$$

ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(x, \mathbf{y})$, который при $x = \xi$ принимает значение

$$\psi(\xi, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y}). \tag{27}$$

Доказательство дает одновременно метод для фактического построения интеграла. Находим характеристики дифференциального уравнения (2), т. е. интегральные кривые системы ($\nu = 1, \ldots, n$)

$$y'_\nu(x) = -f_{q_\nu}, \qquad z'(x) = f - \sum_{\varkappa=1}^{n} q_\varkappa f_{q_\varkappa}, \qquad q'_\nu(x) = f_{y_\nu} + q_\nu f_z,$$

которые при $x = \xi$ проходят через точки

$$(\eta_1, \ldots, \eta_n, \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n), \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}).$$

Эти характеристики существуют для любого η_ν в интервале $|x-\xi| \leqslant \alpha$; обозначим их через

$$y_\nu = Y_\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n), \qquad z = Z(x, \eta_1, \ldots, \eta_n),$$
$$q_\nu = Q_\nu(\varkappa, \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Можно показать, что первые n из этих уравнений однозначно разрешимы относительно η_ν для любого y_ν и что это $2n+1$ уравнение дает, таким образом, для искомого интеграла $z = \psi(x, \mathbf{y})$ и его производных $\psi_{y_\nu} = Q_\nu$ параметрическое представление (с параметрами $\eta_1, \ldots, \eta_n$).

(б) Если f удовлетворяет предположениям не во всей области (22), а, например, в конечном кубе, то можно поступить, как намечено в п. 10.3 (б)[1]).

(в) Сделанные в (а) предположения о функциях f и ω могут быть ослаблены[2]).

(г) Если функции f, ω зависят еще от параметров λ_μ, $\mu = 1, \ldots$ $\ldots, m$, то можно доказать следующее[3]).

Пусть функция[4]) $f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}, \lambda)$ в области[5]) $|x - \xi| \leqslant a$; $\boldsymbol{y}$, z, $\boldsymbol{q}$ — любые; $\Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda^*_\mu$ $k \geqslant 1$ раз непрерывно дифференцируема по всем $2n + m + 2$ аргументам x, $y_\varkappa$, z, $q_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. Далее, пусть выполнено условие (23), и в области

$$\boldsymbol{y} \text{ — любое; } \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda^*_\mu \tag{28}$$

функция $\omega(\boldsymbol{y}, \lambda)$ k раз непрерывно дифференцируема по $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. Наконец, пусть справедливо неравенство (24) и числа α, β выбраны согласно (25).

Тогда дифференциальное уравнение

$$p = f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}, \lambda)$$

имеет в области (26) при данном λ ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \lambda)$, который при $x = \xi$ принимает значение $\psi(\xi, \boldsymbol{y}, \lambda) = \omega(\boldsymbol{y}, \lambda)$. Функция $\psi(x, \boldsymbol{y}, \lambda)$ в области

$$|x - \xi| \leqslant \alpha; \quad \boldsymbol{y} \text{ — любое; } \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu \tag{29}$$

k раз непрерывно дифференцируема по всем своим $n + m + 1$ аргументу x, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$.

12.7. Полный интеграл; получение частных интегралов из полного.

(а) Существование полных интегралов[6]). Пусть функция $f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ дважды непрерывно дифференцируема в области $|x - \xi| \leqslant a$; $\boldsymbol{y}$, z, $\boldsymbol{q}$ — любые, и пусть выполняются неравен-

---

[1]) См. T. Ważewski, Annales Soc. Polon 14 (1935), стр. 149—177.

[2]) См. T. Ważewski, Annales Soc. Polon 14 (1935), стр. 149—177; T. Ważewski, Math. Zeitschrift 43 (1938), стр. 521—532; E. Digel Math. Zeitschrift 44 (1938), стр. 445—451.

[3]) См. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 256—284.

[4]) В соответствии с принятыми ранее обозначениями λ означает вектор с компонентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

[5]) Здесь, а также в неравенствах (26), (28), (29) знак равенства может быть опущен без всяких дополнительных оговорок.

[6]) См. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, 1930, стр. 301—314.

ства (23). Тогда для любого $b > 0$ найдется $\alpha > 0$ такое, что дифференциальное уравнение (2) в области

$$|x-\xi| \leqslant \alpha, \quad |y_\nu| \leqslant b, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

имеет полный интеграл.

Это следует из п. 12.6 (г), если считать функцию f не зависящей от λ, и положить

$$\omega(\boldsymbol{y}, \lambda) = \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu y_\nu.$$

Если $\psi(x, \boldsymbol{y}, \lambda)$ — интеграл, существующий в силу п. 12.6 (г), то в точке $x = \xi$

$$\frac{\partial(\psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n})}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \ldots & y_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

таким образом, якобиан отличен от нуля также и в некоторой окрестности значения $x = \xi$.

В том случае, когда о функции f известно лишь то, что она в окрестности точки $(\xi, \boldsymbol{y}_0, z_0, \boldsymbol{q}_0)$ дважды непрерывно дифференцируема, также можно доказать, что дифференциальное уравнение (2) в достаточно малой окрестности точки $(\xi, \boldsymbol{y}_0)$ имеет полный интеграл.

Для дифференциального уравнения (1) полный интеграл существует в окрестности каждого регулярного плоскостного элемента, если функция F в этой окрестности дважды непрерывно дифференцируема.

(б) Получение частных интегралов из полного. Пусть $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a})$ — полный интеграл дифференциального уравнения (1); здесь $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Подставим вместо констант a_ν непрерывно дифференцируемые функции $\alpha^\nu(\boldsymbol{r})$ [1]) и положим [2])

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}, \alpha^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \alpha^n(\boldsymbol{r})).$$

Тогда

$$\Psi_{x_\nu} = \psi_{x_\nu} + \sum_{k=1}^{n} \psi_{a_k} \alpha^k_{x_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

---

[1]) Для нумерации используются верхние индексы, внизу пишется аргумент, по которому производится дифференцирование, например: $\alpha^k_{x_\nu} = \dfrac{\partial \alpha^k}{\partial x_\nu}$.

[2]) Результат будет справедлив в достаточно малой окрестности некоторой точки; в каждом конкретном примере область допустимых значений функций $\alpha^k(\boldsymbol{r})$ требует отдельного изучения.

Следовательно, Ψ — интеграл уравнения (1), если

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_{a_k} \alpha^k_{x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

причем в производные ψ_{a_k} подставлены функции $a_k = \alpha^k(\boldsymbol{r})$. Таким образом, если выбирать непрерывно дифференцируемые функции $\alpha^k(\boldsymbol{r})$, удовлетворяющие условию (30), то указанный способ дает нам частные интегралы.

Если для всех $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\psi_{a_k}(\boldsymbol{r}, \alpha^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \alpha^n(\boldsymbol{r})) = 0\,^{1)} \tag{31}$$

то Ψ — особый интеграл уравнения (1).

Пусть для m ($m < n$) непрерывно дифференцируемых функций $\Phi^\rho(\boldsymbol{a})$, $\rho = 1, \ldots, m$ и n непрерывно дифференцируемых функций $\alpha^\nu(\boldsymbol{r})$, $\nu = 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$\Phi^\rho(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, m, \tag{32}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi^\rho_{a_k} \alpha^k_{x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

причем в функции $\Phi^\rho_{a_k}$ подставлены значения $a_k = \alpha^k$. Далее, пусть для m функций $\lambda_\rho(\boldsymbol{r})$, $\rho = 1, \ldots, m$ справедливы равенства

$$\psi_{a_k}(\boldsymbol{r}, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \sum_{\rho=1}^{m} \lambda_\rho \Phi^\rho_{a_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Тогда уравнения (30) являются следствиями (33), и, следовательно, функция Ψ есть интеграл уравнения (1).

Практически при данных Φ^ρ исходят из $n + m$ уравнений (32) и (34) для $n + m$ функций α^k, λ_ρ. Если из этих уравнений найдены непрерывно дифференцируемые функции α^k, то их надо только подставить в функцию ψ вместо аргументов a_k.

Пример. Рассмотрим снова пример п. 9.5 (в):

$$pq = z, \quad \psi = (x - a)(y - b).$$

Пусть $m = 1$ и $\Phi(a, b) = aA + bB$, где A, B — произвольные постоянные, не равные нулю. В этом случае уравнения (32) и (34) имеют вид

$$\alpha A + \beta B = 0, \quad \beta - y = \lambda A, \quad \alpha - x = \lambda B,$$

---

1) Условие (31) справедливо, если имеет место равенство (30) и определитель $\dfrac{\partial(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$, однако условие (31) проще, чем это комбинированное условие.

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{Ax - By}{2A}; \quad \beta = -\frac{Ax - By}{2B}.$$

Таким образом, интеграл

$$\Psi = \frac{1}{4AB}(Ax + By)^2.$$

(в) О существовании данного интеграла среди интегралов, определенных посредством полного интеграла. Пусть $z = \chi(\boldsymbol{r})$ — фиксированный интеграл дифференциального уравнения (1). Если для выбранных соответствующим образом непрерывно дифференцируемых функций $\alpha^k(\eta)$ справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\boldsymbol{r}, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \chi(\boldsymbol{r}), \\ &\psi_{x_\nu}(\boldsymbol{r}, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \chi_{x_\nu}(\boldsymbol{r}), \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

то этот интеграл находится среди частных интегралов, определяемых методом (б) из полного интеграла $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a})$.

Практически поступают так: из уравнений (35) вычисляют функции α^k и исследуют, выполняется ли для них уравнения (30).

12.8. Метод Якоби[1]**.** Пусть F^1 — левая часть дифференциального уравнения (1) — дважды непрерывно дифференцируема. Дополним это уравнение «не зависящими» друг от друга уравнениями того же типа

$$F^2 = 0, \ \ldots, \ F^k = 0$$

до инволюционной системы[2] k уравнений. В общем случае получается $k = n$ или $k = n + 1$. (Если z само не входит в систему, то $k = n$.) Эта система строится способом, изложенным в § 14. По сравнению с п. 14.9 (г) в рассматриваемом случае одного дифференциального уравнения (1) нет ничего нового, только изучаемая там первоначальная система m уравнений здесь состоит только из одного уравнения.

Чтобы получить систему k уравнений, разыскивают прежде всего дважды непрерывно дифференцируемую функцию F^2, которая состоит в инволюции с функцией F^1, т. е. является решением линейного однородного дифференциального уравнения (см. пп. 9.1 и 14.4)

$$[F^1, Z] = 0,$$

[1]) Более подробно см. в § 14.

[2]) Определение см. в п. 14.1 (б).

или, что то же самое, постоянна вдоль каждой характеристической полосы уравнения (1). Такие функции называются *первыми интегралами* уравнения (1). Их часто удается найти, комбинируя характеристические уравнения, как это всегда пытаются делать при решении дифференциальных уравнений с частными производными. Если при этом удается получить даже больше таких функций: $F^2, \ldots, F^\nu$, находящихся в инволюции друг к другу, то все эти функции можно использовать для построения инволюционной системы [1]).

Если найдены функции $F^2, \ldots, F^k$ (где $k=n$ или $k=n+1$), то каждую функцию F^ν для $\nu \geqslant 2$ можно заменить через $F^\nu - A_\nu$ с произвольными константами A_ν. Тогда на основании п. 14.3 получается даже полный интеграл уравнения (1).

12.9. Частный случай: $p = f(x, y, q)$.

(а) Для дифференциального уравнения

$$p = f(x, y, q), \tag{36}$$

в котором $\boldsymbol{y}$ опять означает совокупность $y_1, \ldots, y_n$; $\boldsymbol{q}$ — совокупность $q_1, \ldots, q_n$; $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}$, а сама искомая функция $z = z(x, y)$ отсутствует, понятие полного интеграла может быть усилено. Именно, под *полным интегралом* здесь понимается интеграл, зависящий от параметров a и $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a,$$

который в рассматриваемой области дважды непрерывно дифференцируем по всем $2n+1$ аргументам x, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{a}$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial\left(\psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}\right)}{\partial(a_1, \ldots, a_n)} \neq 0. \tag{37}$$

(б) Если функция $f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$ в окрестности точки $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ дважды непрерывно дифференцируема, то уравнение (36) имеет в окрестности точки $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ полный интеграл в указанном выше смысле.

Его можно получить следующим путем. Найдем решения характеристической системы уравнения (36) (см. § 12, (13)):

$$y_\nu'(x) = -f_{q_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}), \quad q_\nu'(x) = f_{y_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}) \quad (\nu = 1, \ldots, n); \tag{38}$$

$$z'(x) = f - \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu f_{q_\nu}. \tag{39}$$

[1]) Если только все они функционально независимы, т. е. выполняются необходимые условия § 14, (21) и (24).

Пусть $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — произвольная точка в достаточно малой окрестности точки $(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$. Решение уравнения (38), которое для $x = x_0$ принимает значение $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, имеет вид

$$y_\nu = Y_\nu(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \quad q_\nu = Q_\nu(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{40}$$

Если положить $z(x_0) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, то из (39) следует, что

$$z = Z(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{ab} + \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu F_{q_\nu} - F \right) dx, \tag{41}$$

причем большие буквы F, F_{q_ν} означают значения функций f, f_{q_ν} после подстановки в них Y_ν, Q_ν. Разрешая первые n уравнений (40) относительно $\boldsymbol{b}$, мы получим (для значений x, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{a}$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, q_0)) вполне определенную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})$. С ее помощью из (41) находим полный интеграл уравнения (36)

$$z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a = Z(x, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{a}) + a,$$

для которого $\psi(x_0, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = a + \boldsymbol{ay}$.

(в) Если для дифференциального уравнения (36) найден полный интеграл[1]), то решения характеристических уравнений (38) можно получить из него только с помощью дифференцирования и исключения.

Пусть $f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$; пусть $z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a$ в окрестности точки $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{a}_0)$ — полный интеграл уравнения (36), дважды непрерывно дифференцируемый по x, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{a}$, и пусть в точке $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{a}_0)$ выполняются условия

$$\psi_{y_\nu} = q_{0\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n; \quad \frac{\partial(\psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)} \neq 0.$$

Разрешим уравнения

$$\psi_{a_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = b_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n \tag{42}$$

относительно $\boldsymbol{y}$ в некоторой окрестности точки $(x_0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)$, где

$$b_{0\nu} = \psi_{a_\nu}(x_0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0), \quad \nu = 1, \ldots, n;$$

пусть результат будет $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Положим, далее,

$$Q_\nu(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \psi_{y_\nu}(x, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{a}).$$

Тогда функции

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

---

[1]) Что иногда удается сделать без решения характеристической системы.

являются решениями уравнений (38). Таким образом получаются все интегральные кривые системы (38), проходящие в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, q_0).

12.10. Приложение к механике[1]. В механике конечного числа материальных точек характеристические уравнения (38) (называемые *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями*) записываются в виде[2])

$$\frac{dq_\nu}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\nu},\quad \frac{dp_\nu}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_\nu},\quad \nu=1,\ldots,n, \tag{43}$$

где *функция Гамильтона*

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)$$

—данная функция, а $q_\nu=q_\nu(t)$, $p_\nu=p_\nu(t)$ — искомые функции. В силу п. 12.9 можно получить решения канонических уравнений из полного интеграла $z=z(q_1,\ \ldots,\ q_n)$ соответствующего уравнения с частными производными

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\mathscr{H}\left(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \frac{\partial z}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial q_n}\right)=0. \tag{44}$$

Это дифференциальное уравнение называется в механике *уравнением Гамильтона — Якоби*, в геометрической оптике — *уравнением эйконала.*

Пример. Пусть материальная точка $(x,\ y)$ движется в плоскости $x,\ y$ под действием силы тяготения со стороны массы, закрепленной в начале координат. Движение происходит согласно уравнениям[3])

$$x''(t)=U_x,\quad y''(t)=U_y,\quad \text{где}\quad U=\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

С помощью функции Гамильтона

$$\mathscr{H}(x,\ y,\ p,\ q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-U(x,\ y)$$

эту систему можно свести к канонической системе

$$x'(t)=\mathscr{H}_p,\quad y'(t)=\mathscr{H}_q,\quad p'(t)=-\mathscr{H}_x,\quad q'(t)=-\mathscr{H}_y.$$

Уравнение в частных производных (44) для функции $z=z(t,\ x,\ y)$ имеет вид

$$z_t+\frac{1}{2}\left(z_x^2+z_y^2\right)=\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

---

[1]) [См. Степанов, стр. 412—416; Курант, стр. 111—138, а также Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960; И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961. — *Прим. ред.*]

[2]) Здесь буквы p_ν, q_ν имеют уже не тот смысл, какой мы придавали им до сих пор.

[3]) [Массы предполагаются единичными. Обозначения переменных в этом примере отличаются от обозначений, принятых по всей книге. — *Прим. ред.*]

или, если подставить $\zeta(t, \rho, \vartheta) = z(t, x, y)$, где $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$,

$$\zeta_t + \frac{1}{2}\left(\zeta_\rho^2 + \frac{\zeta_\vartheta^2}{\rho^2}\right) = \frac{k^2}{\rho}.$$

Для этого дифференциального уравнения, согласно п. 13.3, имеем полный интеграл

$$\zeta = -At + B\vartheta \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2A + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{B^2}{\rho^2}}\, d\rho + C. \qquad (*)$$

Решая теперь уравнения

$$\frac{\partial\zeta}{\partial A} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial B} = \text{const},$$

получаем искомые функции

$$x(t) = \rho\cos\vartheta, \quad y(t) = \rho\sin\vartheta.$$

Если в выражении (*) для ζ взять знак $+$, то кривая, проходящая при $t = t_0$ через точку (ρ_0, ϑ_0), запишется в следующем виде:

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{R}}, \qquad \vartheta - \vartheta_0 = B\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{R}},$$

где $R = 2A + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{B^2}{\rho^2}$.

Второе из этих уравнений определяет траекторию пути, а первое — время движения. Если проинтегрировать второе уравнение, то для $B \neq 0$ получим:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \arcsin\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{B^2}{k^2\rho} - 1\right) + \text{const},$$

где $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2AB^2}{k^4}$. Следовательно, траекторией является коническое сечение

$$\rho = \frac{B^2}{k^2[1 + \varepsilon\sin(\vartheta - \vartheta_0)]}.$$

12.11. Оценка Нагумо[1]**.** Пусть функция $f(x, y, z, q)$ определена в области $\mathfrak{G}(x, y, z, q)$ и удовлетворяет там условию Липшица

$$|f(x, y, z, \bar{q}) - f(x, y, z, q)| \leqslant A\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{q}_\nu - q_\nu|. \qquad (45)$$

Пусть для всех $\nu = 1, \ldots, n$ функции $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ в интервале $\xi \leqslant x < c$ непрерывно дифференцируемы, $a_\nu(x) < b_\nu(x)$ и [2]

$$a'_\nu \geqslant A, \quad b'_\nu \leqslant -A.$$

[1]) См. M. Nagumo, Journal of Math. 15 (1938), стр. 51—56; J. Szarski, Annales Soc. Polon. 22 (1950), стр. 1—34.

[2]) Существенно, что здесь стоит константа Липшица A из (45).

Обозначим через $\mathfrak{g}$ область

$$\xi \leqslant x < c; \quad a_\nu(x) \leqslant y_\nu \leqslant b_\nu(x), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{46}$$

Пусть функции $u(x, \mathfrak{y})$, $v(x, \mathfrak{y})$ непрерывно дифференцируемы в $\mathfrak{g}$ и системы значений x, $\mathfrak{y}$, z, $\mathfrak{q}$ принадлежат области $\mathfrak{G}$ при $z = u$, $q_\nu = u_{y_\nu}$ и при $z = v$, $q_\nu = v_{y_\nu}$. Наконец, предположим, что

$$u_x \geqslant f\left(x, \mathfrak{y}, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}\right), \qquad v_x \leqslant f\left(x, \mathfrak{y}, v, v_{y_1}, \ldots, v_{y_n}\right),$$

причем в каждой точке области $\mathfrak{g}$ знак равенства может иметь место самое большее в **одном** из этих двух неравенств, и, кроме того,

$$u(\xi, \mathfrak{y}) > v(\xi, \mathfrak{y}) \quad \text{для} \quad a_\nu(\xi) \leqslant y_\nu \leqslant b_\nu(\xi).$$

Тогда

$$u(x, \mathfrak{y}) > v(x, \mathfrak{y})$$

во всей области $\mathfrak{g}$.

Это *неравенство Нагумо* может быть использовано для оценки решения дифференциального уравнения (2).

Пусть правая часть этого уравнения определена в области $\mathfrak{G}$, удовлетворяет там неравенству (45), и пусть область $\mathfrak{g}$ определена условиями (46). Предположим, что в $\mathfrak{G}$ существует интеграл $\psi(x, \mathfrak{y})$ с начальным значением $\psi(\xi, \mathfrak{y}) = \omega(\mathfrak{y})$, но саму функцию ψ вычислить сложно или она нам неизвестна

Если нам удастся заключить функции f, ω между двумя функциями $f_\nu(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$, $\omega_\nu(\mathfrak{y})$ так, что

$$f_1 < f < f_2, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

и если для дифференциальных уравнений $p = f_1$, $p = f_2$ можно вычислить интегралы $\psi_1(x, \mathfrak{y})$, $\psi_2(x, \mathfrak{y})$ с начальными значениями $\psi_1(\xi, \mathfrak{y}) = \omega_1(\mathfrak{y})$, $\psi_2(\xi, \mathfrak{y}) = \omega_2(\mathfrak{y})$, то в области $\mathfrak{g}$ имеется оценка

$$\psi_1(x, \mathfrak{y}) < \psi(x, \mathfrak{y}) < \psi_2(x, \mathfrak{y}).$$

Отсюда получается неравенство Хаара п. 4.4.

§ 13. Решение частных видов нелинейных уравнений с n независимыми переменными

13.1. $F(\mathfrak{p}) = 0$. Если константы A_ν таковы, что

$$F(A_1, \ldots, A_n) = 0,$$

если F непрерывно дифференцируема и если $\sum_{\nu=1}^{n} \left| F_{p_\nu} \right| \neq 0$, то

$$z = A_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

— полный интеграл.

13.2. $F(z, p)=0$. Если сделать подстановку

$$z=\zeta(\xi),\quad \xi=A_1x_1+\ldots+A_nx_n,$$

то из данного уравнения с частными производными получается для $\zeta=\zeta(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(\zeta,\ A_1\zeta',\ \ldots,\ A_n\zeta')=0.$$

13.3. $F[f_1(x_1,\ p_1\varphi(z)),\ \ldots,\ f_n(x_n,\ p_n\varphi(z))]=0$. Это — *дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными*. Пусть постоянные A_ν таковы, что

$$F(A_1,\ \ldots,\ A_n)=0.$$

Разрешим уравнение

$$f_\nu(x_\nu,\ p_\nu\varphi)=A_\nu$$

относительно $p_\nu\varphi$:

$$p_\nu\varphi(z)=g_\nu(x_\nu,\ A_\nu).$$

Тогда

$$\int\varphi(z)\,dz=\sum_{\nu=1}^{n}\int g_\nu(x_\nu,\ A_\nu)\,dx_\nu+A_0$$

— интеграл данного дифференциального уравнения.

Рассмотрим частные случаи.

(a) $$f_1(x_1,\ p_1)\,f_2(x_2,\ p_2)\ldots f_n(x_n,\ p_n)=a.$$

При $a=0$ дифференциальное уравнение справедливо для всех таких z, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$f_k(x_k,\ p_k)=0. \qquad (1)$$

Если это уравнение разрешить относительно p_k:

$$p_k=\varphi_k(x_k),$$

то

$$z=\int\varphi_k(x_k)\,dx_k+\Omega(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n)$$

— решение уравнения (1), причем Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

При $a\neq 0$ подберем константы A_ν так, что $A_1\ldots A_n=a$. Если уравнения

$$f_\nu(x_\nu,\ p_\nu)=A_\nu$$

разрешить относительно p_ν:

$$p_\nu=\varphi_\nu(x_\nu,\ A_\nu),$$

то

$$z=A_0+\sum_{\nu=1}^{n}\int\varphi_\nu(x_\nu,\ A_\nu)\,dx_\nu$$

— полный интеграл.

(б) $\quad f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \ldots + f_n(x_n, p_n) = 0.$

Пусть постоянные A_ν выбраны так, что $\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0$. Тогда, разрешая уравнения

$$f_\nu(x_\nu, p_\nu) = A_\nu$$

относительно p_ν:

$$p_\nu = \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu),$$

мы получаем полный интеграл в виде

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} \int \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu)\, dx_\nu + A_0.$$

13.4. Однородные уравнения. Пусть левая часть уравнения

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0$$

становится однородной по $z, p_1, \ldots, p_n$, если z заменить выбранной надлежащим образом степенью z^a.

Если $a \neq 1$, то подстановкой $z = w^\lambda$, где $\lambda = \frac{a}{a-1}$, мы приведем уравнение к виду

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \lambda^{-a}, w_{x_1}, \ldots, w_{x_n}\right) = 0,$$

не содержащему неизвестной функции.

Если $a = 1$, то, полагая $z = e^w$, мы получаем:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, 1, w_{x_1}, \ldots, w_{x_n}\right) = 0.$$

Уравнение $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = z^c$, где левая часть — однородная по $p_1, \ldots$ $\ldots, p_n$ функция степени m, есть частный случай однородного уравнения при $a = \frac{m}{c}$.

13.5. $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0$. Преобразование Лежандра. Пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ функция $z(\boldsymbol{r})$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть для $1 \leqslant k \leqslant n$ область $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ можно преобразованием

$$X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}, \quad X_k = z_{x_k}(\boldsymbol{r}), \ldots, X_n = z_{x_n}(\boldsymbol{r}) \qquad (2)$$

взаимно однозначно отобразить на область $\overline{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{X})$. Наконец, пусть в области $\mathfrak{G}$

$$\det\left|z_{x_\mu x_\nu}\right| \neq 0 \qquad (\mu, \nu \geqslant k).$$

Если положить

$$Z(\boldsymbol{X}) = \sum_{\rho=k}^{n} x_\rho z_{x_\rho} - z(\boldsymbol{r}), \qquad (3)$$

то, наряду с уже приведенными соотношениями (2), (3), получаются также уравнения

$$z_{x_\nu} = -Z_{X_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, k-1, \tag{4}$$

$$x_\nu = X_\nu, \ \nu = 1, \ldots, k-1; \quad x_\nu = Z_{X_\nu}(\boldsymbol{X}), \ \nu = k, \ldots, n,$$

$$z(\boldsymbol{r}) = \sum_{\rho=k}^{n} X_\rho Z_{X_\rho} - Z(\boldsymbol{X}). \tag{5}$$

Преобразование (4), (5) называется *преобразованием Лежандра.*

С помощью этого преобразования (коль скоро интегралы удовлетворяют указанным предположениям) дифференциальное уравнение

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{6}$$

переходит в уравнение

$$F\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, Z_{X_k}, \ldots, Z_{X_n}, \sum_{\rho=k}^{n} X_\rho Z_{X_\rho} - Z, -Z_{X_1}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, -Z_{X_{k-1}}, X_k, \ldots, X_n\right) = 0 \tag{7}$$

которое иногда проще первоначального уравнения. Если можно найти интеграл $Z(\boldsymbol{X})$ уравнения (7), то (5) — параметрическое представление интеграла уравнения (6).

При этом преобразовании некоторые интегралы могут пропасть (именно те, для которых указанные вначале предположения не выполняются). Следовательно, требуется еще исследовать, имеются ли подобные интегралы.

Если вместо (6) рассмотреть дифференциальное уравнение

$$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 0,$$

в которое неизвестная функция z не входит, то соответствующее преобразованное уравнение имеет вид

$$F(X_1, \ldots, X_{k-1}, Z_{X_k}, \ldots, Z_{X_n}, -Z_{X_1}, \ldots$$
$$\ldots, -Z_{X_{k-1}}, X_k, \ldots, X_n) = 0.$$

13.6. $\sum_{\nu=1}^{k-1} p_\nu f_\nu = \sum_{\nu=k}^{n} x_\nu f_\nu - f_{n+1}$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $f_\nu = f_\nu\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, p_k, \ldots, p_n, \sum_{\nu=k}^{n} x_\nu p_\nu - z\right)$. При преобразовании Лежандра (4), (5) данное дифференциальное уравнение переходит в квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \frac{\partial Z}{\partial X_\nu} = F_{n+1}, \quad \text{где} \quad F_\nu = f_\nu(X_1, \ldots, X_n, Z).$$

В частности, все сказанное справедливо для уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu f_\nu = f_{n+1}, \quad f_\nu = f_\nu\left(p_1, \ldots, p_n, \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu - z\right),$$

представляющего собой частный случай уравнения 13.6 при $k=1$.

13.7. $z = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n + f(p_1, \ldots, p_n)$. Это — *дифференциальное уравнение Клеро*. Если f определена и дважды непрерывно дифференцируема в точке $(A_1, \ldots, A_n)$, то

$$z = A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n + f(A_1, \ldots, A_n)$$

— полный интеграл.

§ 14. Система нелинейных уравнений

14.1. Частный случай: $p_\nu = f^\nu(r, y, z, q)$, $\nu = 1, \ldots, m$. Пусть дана система r дифференциальных уравнений, разрешенных относительно всех r производных:

$$p_\nu = f^\nu(r, y, z, q), \quad \nu = 1, \ldots, m; \tag{1}$$

здесь $r = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $q = (q_1, \ldots, q_s)$, где $p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$, $q_\mu = \frac{\partial z}{\partial y_\mu}$, $z = z(x, y)$ — неизвестная функция. (Случай $s = 0$ допускается.)

(а) Если функции f^ν в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(r, y, z, q)$ непрерывно дифференцируемы по аргументам x_ν, y_ν, z, q_ν, то каждый дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(r, y)$ удовлетворяет $\frac{m(m-1)}{2}$ уравнениям

$$f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu + \sum_{\sigma=1}^{s} f^\mu_{q_\sigma}\left(f^\nu_{y_\sigma} + q_\sigma f^\nu_z\right) =$$
$$= f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu + \sum_{\sigma=1}^{s} f^\nu_{q_\sigma}\left(f^\mu_{y_\sigma} + q_\sigma f^\mu_z\right), \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m), \tag{2}$$

куда следует подставить $z = \psi$, $q_\sigma = \psi_{y_\sigma}$.

Следовательно, для данной системы (1) всегда можно написать еще несколько уравнений (2), которые также обязаны удовлетворяться, если система имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение.

(б) Если уравнения (2) становятся тождествами при подстановке величин r, y, z, q, то соответствующая система (1) называется *инволюционной системой* или *якобиевой* системой или *вполне инте-*

грируемой системой. Уравнения (2) называются *условиями интегрируемости* системы (1).

14.2. Теорема существования и единственности для якобиевой системы в области аналитических функций. Пусть функции $f^{\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ являются регулярными аналитическими в точке $(\boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{y}^0, z^0, \boldsymbol{q}^0)$ и в окрестности этой точки удовлетворяются условия интегрируемости (2). Далее, пусть дана функция $\omega(\boldsymbol{y})$, регулярная аналитическая в точке $\boldsymbol{y}^0$, причем справедливы соотношения:

$$\omega(\boldsymbol{y}^0) = z^0, \quad \omega_{y_\mu}(\boldsymbol{y}^0) = q_\mu^0, \quad \mu = 1, \ldots, s.$$

Тогда система (1) в достаточно малой окрестности точки $(\boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{y}^0)$ имеет ровно один регулярный аналитический интеграл $z = \psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ с начальными значениями $\psi(\boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{y}) = \omega(\boldsymbol{y})$.

14.3. Теорема существования и единственности для якобиевой системы в области действительных функций. Метод Майера для решения якобиевой системы.

(а) Пусть при фиксированных ξ_ν функции $f^{\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ дважды непрерывно дифференцируемы в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant a; \ \boldsymbol{y}, \ z, \ \boldsymbol{q} \text{ — любые,} \tag{3}$$

и пусть справедливы неравенства

$$\left.\begin{cases} \left|f^\rho_{x_\nu}\right|, \ \left|f^\rho_{y_\nu}\right|, \ \left|f^\rho_z\right|, \ \left|f^\rho_{q_\nu}\right|, \\ \left|f^\rho_{y_\mu y_\nu}\right|, \ \left|f^\rho_{y_\mu z}\right| \ \left|f^\rho_{y_\mu q_\nu}\right|, \ \left|f^\rho_{zz}\right|, \ \left|f^\rho_{z q_\nu}\right|, \ \left|f^\rho_{q_\mu q_\nu}\right| \end{cases}\right\} \leqslant A. \tag{4}$$

Предположим, что выполнены условия интегрируемости (2). Пусть, далее, функция $\omega(\boldsymbol{y})$ непрерывно дифференцируема по любому y_μ и удовлетворяет неравенству

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{s} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqslant B, \quad \mu = 1, \ldots, s. \tag{5}$$

Наконец, пусть выбраны числа β, α, удовлетворяющие условиям

$$0 < \beta < \frac{1}{mA} \ln\left(1 + \frac{\ln 3}{2s(B+1)}\right) \quad \text{и} \quad \alpha = \min(a, \beta). \tag{6}$$

Тогда система (1) имеет в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant \alpha; \quad \boldsymbol{y} \text{ — любое} \tag{7}$$

ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ с начальным значением $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_m, \boldsymbol{y}) = \omega(\boldsymbol{y})$ [1]).

[1]) См. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 267—275.

(б) Для фактического решения данной системы (1) часто с успехом может использоваться *метод Майера. Преобразование Майера* (см. п. 6.4) состоит в следующем: m независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ посредством соотношений

$$x_\rho - \xi_\rho = uu_\rho, \quad \rho = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

представляются как функции от $m+1$ независимого переменного $u, u_1, \ldots, u_m$, причем $|u| \leqslant 1$, $|u_\rho| \leqslant \alpha$; очевидно, что x_ρ принимаются все значения в области $|x_\rho - \xi_\rho| \leqslant \alpha$. Вместо системы (1) теперь рассматривается одно уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \sum_{\rho=1}^{m} u_\rho f^\rho \left(uu_1 + \xi_1, \ldots, uu_m + \xi_m; \boldsymbol{y}, Z \frac{\partial Z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial y_s} \right), \tag{9}$$

в котором $u, y_1, \ldots, y_s$ являются независимыми переменными, а $u_1, \ldots, u_m$ — параметрами. Если $Z = \Psi(u, \boldsymbol{y}; u_1, \ldots, u_m)$ — интеграл дифференциального уравнения (9) с начальным значением

$$\Psi(0, \boldsymbol{y}; u_1, \ldots, u_m) = \omega(\boldsymbol{y}),$$

не зависящим (это важно!) от u_ν, то

$$z(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \Psi(1, \boldsymbol{y}; x_1 - \xi_1, \ldots, x_m - \xi_m)$$

— искомый интеграл системы (1).

(в) Пример. $p_1 = q^2 + y$; $p_2 = q^2 + y$.

Система инволюционная. Если выбрать $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и положить $x_\nu = uu_\nu$, то уравнение (9) принимает вид

$$Z_u = (u_1 + u_2)\left(Z_y^2 + y\right).$$

Для этого дифференциального уравнения из соответствующих характеристических уравнений находится интеграл

$$Z = A(u_1 + u_2)u - \frac{2}{3}(A - y)^{\frac{3}{2}} + B.$$

Если A, B не зависит от u_1, u_2, то Z, как это и требуется, не зависит от u_1, u_2 при $u = 0$. Если подставить $uu_\nu = x_\nu$, то для исходной системы получается интеграл

$$z = A(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}(A - y)^{\frac{3}{2}} + B.$$

(г) Пусть функции $f^\nu(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}, \lambda)$ (здесь $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$) в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant a; \quad \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q} \text{ — любые}; \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$$

k раз непрерывно дифференцируема ($k \geqslant 1$) по всем $m + 2s + k + 1$ аргументам x_ν, y_ν, z, q_ν, λ_ν; этим же свойством по предположению

обладают функции $f^{\nu}_{y_\mu}$, f^{ν}_{z}, $f^{\nu}_{q_\mu}$. Далее, пусть выполняются неравенства (4) и условия интегрируемости (2). Предположим, что функция $\omega(y, \lambda)$ в области

$$y\text{ — любое;}\quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda^*_\mu \tag{10}$$

k раз непрерывно дифференцируема по y_ν, λ_ν, так же как и ее производные ω_{y_μ}. Далее, пусть выполнено (5). Наконец, пусть β, α снова выбираются в соответствии с (6).

Тогда система

$$p_\nu = f^{\nu}(r, y, z, q, \lambda), \quad \nu = 1, \ldots, m$$

при фиксированных λ_ν имеет в области (7) ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(r, y, \lambda)$ с начальным значением

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_m, y, \lambda) = \omega(y, \lambda).$$

Функция $\psi(r, y, \lambda)$ вместе с ее производными ψ_{x_ν}, ψ_{y_ν} в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant \alpha;\quad y\text{ — любое;}\quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda^*_\mu \tag{11}$$

k раз непрерывно дифференцируема по всем $m+s+k$ аргументам x_ν, y_ν, λ_ν.

(д) Если

$$\omega(y, \lambda) = \lambda_0 + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_\sigma y_\sigma.$$

то, применяя (г) к системе (1), правые части которой не зависят от λ, мы получим для этой системы полный интеграл $z = \psi(r, y, \lambda)$ в достаточно малой окрестности значений $x_\rho = \xi_\rho$, т. е. интеграл, для которого

$$\frac{\partial(\psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_s})}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s)} \neq 0.$$

(е) Если система (1) задана не в области (3), то пытаются так расширить область существования функций f^{ν} и ω, чтобы теорема (а) была применима

14.4. Скобки Якоби и Пуассона. В более общих системах нелинейных уравнений (12) роль условий интегрируемости (2) играют уравнения (13). Некоторые свойства этих уравнений будут сейчас приведены.

Пусть функции $F(r, z, y)$, $G(r, z, y)$, $H(r, z, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих $2n+1$ переменных r, z, y [1]) в области $\mathfrak{G}(r, z, y)$.

[1]) Здесь снова $r = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

(а) *Скобка Якоби* $[F, G]$ определяется так [1]):

$$[F, G] = \sum_{\nu=1}^{n} \{(F_{x_\nu} + y_\nu F_z) G_{y_\nu} - (G_{x_\nu} + y_\nu G_z) F_{y_\nu}\},$$

или если использовать сокращенное обозначение

$$\frac{dF}{dx_\nu} = F_{x_\nu} + y_\nu F_z,$$

то

$$[F, G] = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{dF}{dx_\nu} G_{y_\nu} - \frac{dG}{dx_\nu} F_{y_\nu}\right).$$

(б) Очевидно, что $[F, C] = 0$ для любой постоянной C;

$$[F, F] = 0, \quad [F, G] = -[G, F].$$

(в) Для дважды непрерывно дифференцируемых функций справедливо соотношение

$$[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = \\ = F_z [G, H] + G_z [H, F] + H_z [F, G].$$

(г) Соотношение $[F, Z] = 0$ при данной функции F есть линейное однородное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $Z = Z(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$.

(д) Если функции F, G, H не зависят от переменной z, т. е. речь идет о функциях $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, то скобка Якоби $[F, G]$ переходит в *скобку Пуассона* (F, G), которая определяется так:

$$(F, G) = \sum_{\nu=1}^{n} (F_{x_\nu} G_{y_\nu} - F_{y_\nu} G_{x_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_\nu, y_\nu)}.$$

(е) Из (в) получается соотношение

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0.$$

(ж) Если F — дважды непрерывно дифференцируемая функция и если $\psi_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $\psi_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — дважды непрерывно дифференцируемые интегралы дифференциального уравнения $(F, Z) = 0$, то скобка Пуассона (ψ_1, ψ_2) — также интеграл этого дифференциального уравнения.

14.5. Общая нелинейная система. Пусть дана нелинейная система дифференциальных уравнений

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{12}$$

---

[1]) [Иногда это выражение носит название *скобок Майера*; см. Степанов, стр. 385—387. — *Прим. ред.*]

(как всегда, здесь $\boldsymbol{r}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, $z=z(\boldsymbol{r})$ — искомый общий интеграл m уравнений (12)). Относительно функций F^ν предполагается, что они в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ непрерывно дифференцируемы по своим $2n+1$ переменным.

Каждый дважды непрерывно дифференцируемый интеграл системы (12) удовлетворяет также уравнениям скобок

$$[F^\mu, F^\nu]=0, \quad 1 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant m; \tag{13}$$

при этом $F^{\mu, \nu}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})=[F^\mu, F^\nu]$ — скобки Якоби, определенные в п. 14.4 (а). Следовательно, данной системе (12) можно всегда поставить в соответствие уравнения (13), которые необходимо должны удовлетворяться, если система вообще разрешима.

14.6. Инволюционные системы и полные системы.

(а) Система (12) называется *инволюционной системой*, если

$$[F^\mu, F^\nu] \equiv 0, \quad 1 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant m, \tag{14}$$

для всех значений $\boldsymbol{r}$, z, $\boldsymbol{p}$. Уравнения (14) называются *условиями интегрируемости* системы (12). Для случая системы (1) это определение только тогда совпадает с определением данным в п. 14.1 (б), когда все правые части системы не зависят от переменной z.

(б) Система (12) называется *полной системой*, если

$$[F^\mu, F^\nu]=0, \quad 1 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant m,$$

для всех систем чисел $(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$, которые удовлетворяют m уравнениям (12).

(в) Для того чтобы получить интегралы системы (12), эту систему дополняют до полной системы (ср. с п. 6.3 (в)) уравнениями (13) (точнее, лишь теми из уравнений (13), которые не являются «алгебраическими следствиями» уравнений (12) в смысле (б)). К пополненной так системе потом снова применяют метод образования скобок, и так далее. Необходимое условие для разрешимости данной системы состоит, очевидно, в том, что каждая расширенная система «алгебраически разрешима», если $\boldsymbol{r}$, z, $\boldsymbol{p}$ рассматриваются как числа.

Пример. $p_1p_2=x_3x_4$, $p_3p_4=x_1x_2$.

Сюда искомая функция z не входит. Путем образования скобок Пуассона получают уравнение

$$x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3-x_4p_4=0.$$

Система трех уравнений теперь полная. Если все же продолжить процесс дальше и образовать, например, скобки Пуассона первого и третьего уравнений

$$2(x_3x_4-p_1p_2)=0,$$

то, как легко видеть, это уравнение является следствием первого уравнения.

(г) Пусть система (12) с $m \leqslant n$ полная. Пусть уравнения (12) удается разрешить относительно $p_1, \ldots, p_m$, т. е. система функций p_μ:

$$p_\mu = f_\mu(\boldsymbol{r}, z, p_{m+1}, \ldots, p_n), \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

которые существуют в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)$ и там непрерывно дифференцируемы, обращает уравнения (12) в тождества. Далее, пусть определитель

$$\frac{\partial(F^1, \ldots, F^m)}{\partial(p_1, \ldots, p_m)}$$

(после подстановки в него выражений (15)) ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не равен тождественно нулю. Тогда (15) — инволюционная система в смысле п. 14.1 (б).

(д) Если система (12) в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ инволюционна в смысле (а) и если функции F^ν в области $\mathfrak{G}$ дважды непрерывно дифференцируемы, то линейные однородные дифференциальные уравнения

$$[F^\mu, Z] = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

образуют полную систему в смысле п. 6.3 (б).

14.7. Метод Якоби для инволюционной системы, не зависящей от z. Речь идет о системе

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

$m \leqslant n$, в которую искомая функция z явно не входит и которая в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ инволюционна. Предположим, что нам удалось дополнить эту систему $n - m$ уравнениями

$$F^{m+1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 0, \ \ldots, \ F^n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{17}$$

так, что полученная система n уравнений является инволюционной системой. Пусть эта новая система (16), (17) может быть разрешена относительно переменных $p_1, \ldots, p_n$:

$$p_\nu = f^\nu(\boldsymbol{r}), \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

причем определитель (в который подставлены выражения (18))

$$\frac{\partial(F^1, \ldots, F^n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0 \tag{19}$$

ни в какой подобласти рассматриваемой области $\boldsymbol{r}$-пространства.

В силу п. 14.6 (г), система (18) является инволюционной, следовательно, $f^\mu_{x_\nu} = f^\nu_{x_\mu}$ и, таким образом, применим метод п. 6.1. Тогда

каждое решение системы (18) есть, в частности, решение системы (16). Так как уравнения

$$F^{m+1} = A_{m+1}, \ \ldots, \ F^n = A_n,$$

где A_ν — произвольные постоянные, вместе с уравнениями (16) образуют инволюционную систему, то вместо (18) получаем зависящую от A_ν систему

$$p_\nu = f^\nu(\boldsymbol{r}; \ A_{m+1}, \ \ldots, \ A_n), \quad \nu = 1, \ \ldots, \ n, \tag{18a}$$

интегралы которой зависят от A_ν, из этих интегралов можно получить полный интеграл системы (16).

Следовательно, по существу надо лишь найти уравнения (17), т. е. подобрать дважды непрерывно дифференцируемые функции $F^{m+1}, \ldots, F^n$. Это делается постепенно. (При этом предполагается, что F^μ дважды непрерывно дифференцируемы.) Прежде всего надо разыскать такое $Z = F^{m+1}$, чтобы условия интегрируемости

$$(F^1, \ Z) = 0, \ \ldots, \ (F^m, \ Z) = 0$$

были тождественно выполнены по $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$. В силу п. 14.4 (г), эти уравнения образуют линейную однородную систему дифференциальных уравнений, а именно (см. п. 14.6 (д)) полную систему. Чтобы получить нетривиальное решение этой системы, можно использовать методы из § 6. Найдя такое решение $Z = F^{m+1}$, решают линейные уравнения

$$(F^\mu, \ Z) = 0, \quad \mu = 1, \ \ldots, \ m+1,$$

и т. д. При этом надо следить за тем, чтобы условие (19) было выполнено.

Пример. В п. 14.6 (в) было установлено, что система

$$p_1p_2 - x_3x_4 = 0, \qquad p_3p_4 - x_1x_2 = 0,$$
$$x_1p_1 + x_2p_2 - x_3p_3 - x_4p_4 = 0$$

полна. Разрешая ее относительно p_1, p_2, p_3, получаем (см. п. 14.6 (г) и (а)) инволюционную систему, а именно:

$$p_1 = \frac{x_2x_3}{p_4}, \qquad p_2 = \frac{x_4p_4}{x_2}, \qquad p_3 = \frac{x_1x_2}{p_4}, \tag{*}$$

а также и вторую систему, которая следует из (*) заменой x_1p_1 на x_2p_2, и наоборот. Следовательно, достаточно рассматривать указанную выше систему (*).

Итак, решим линейные дифференциальные уравнения

$$\left(p_1 - \frac{x_2x_3}{p_4}, \ Z\right) = 0, \qquad \left(p_2 - \frac{x_4p_4}{x_2}, \ Z\right) = 0, \qquad \left(p_3 - \frac{x_1x_2}{p_4}, \ Z\right) = 0;$$

они имеют вид

$$Z_{x_1}+\frac{x_2x_3}{p_4^2}Z_{x_4}+\frac{x_3}{p_4}Z_{p_2}+\frac{x_2}{p_4}Z_{p_3}=0,$$

$$Z_{x_2}-\frac{x_4}{x_2}Z_{x_4}-\frac{x_4p_4}{x_2^2}Z_{p_2}+\frac{p_4}{x_2}Z_{p_4}=0.$$

$$Z_{x_3}+\frac{x_1x_2}{p_4^2}Z_{x_4}+\frac{x_2}{p_4}Z_{p_1}+\frac{x_1}{p_4}Z_{p_2}=0.$$

Интеграл этой линейной системы, очевидно, $Z=\frac{p_4}{x_2}-A$. Присоединяя вытекающее отсюда уравнение $Z=0$ к трем уравнениям (*), получаем:

$$p_1=\frac{x_3}{A},\qquad p_2=Ax_4,\qquad p_3=\frac{x_1}{A},\qquad p_4=Ax_2,$$

а отсюда, наконец, находим полный интеграл

$$z=Ax_1x_3+\frac{1}{A}x_2x_4+B,$$

а также интеграл, получающийся после замены x_1 на x_2 и x_2 на x_1.

14.8. Применение преобразования Лежандра.

(а) Иногда независимые переменные и производные могут быть при надлежащей перенумерации так подразделены на два класса

$$x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ p_1,\ \ldots,\ p_{k-1}\quad\text{и}\quad x_k,\ \ldots,\ x_n,\ p_k,\ \ldots,\ p_n,$$

что зависимость левых частей F^ν системы (16) от $p_1, \ldots, p_{k-1}$ проще, чем зависимость от $x_1, \ldots, x_{k-1}$, и, напротив, зависимость от $x_k, \ldots, x_n$ проще, чем от $p_k, \ldots, p_n$. В таком случае рекомендуется применять преобразование Лежандра. После применения его система (16) переходит в систему

$$F^\mu(X_1,\ \ldots,\ X_{k-1},\ P_k,\ \ldots,\ P_n,\ -P_1,\ \ldots,\ -P_{k-1},\ X_k,\ \ldots,\ X_n)=0,$$

и эти уравнения теперь зависят от производных P_ν более простым образом, чем от X_ν.

(б) При решении методом Якоби (см. п. 14.7) мы предполагали, что определитель (19) не обращается в нуль. В ряде случаев бывает, что при редукциях к инволюционной системе n уравнений с помощью уравнения (17) это предположение нарушается. Однако если хотя бы

$$\frac{\partial(F^1,\ \ldots,\ F^m)}{\partial(p_1,\ \ldots,\ p_m)}\neq 0,$$

то систему (16), (17) можно иногда перевести с помощью преобразования Лежандра (см. п. 13.5) в такую, для которой предположение (19) выполнено.

Именно, если для выбранного надлежашим образом $k > m$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial (F^1, \ldots, F^n)}{\partial (p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

то система (16), (17) переходит после преобразования Лежандра в инволюционную систему

$$\Phi^1 (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}) = 0, \ \ldots, \ \Phi^n (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}) = 0,$$

для которой

$$\frac{\partial (\Phi^1, \ldots, \Phi^n)}{\partial (P_1, \ldots, P_n)} \neq 0.$$

(в) Пример.

$$y^2 p^3 + xp + 3yq = 0. \tag{*}$$

Дифференциальное уравнение может рассматриваться как система (16) с $m = 1$, $n = 2$. В силу п. 14.7, можно разыскать второе уравнение, находящееся с первым в инволюции. Из характеристической системы данного уравнения (*) получаются первые интегралы (ср. с п. 12.8)

$$yp^3 = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{x}{yp^2} - y = \text{const}, \tag{**}$$

и каждое из этих двух уравнений образует вместе с данным, в силу п. 12.8, инволюционную систему.

Если выбрать первое из получившихся соотношений (**), то мы придем к системе

$$p = \frac{A}{\sqrt[3]{y}}, \quad q = -\frac{A}{3} x y^{-\frac{4}{3}} - \frac{A^3}{3}$$

и, таким образом, найдем полный интеграл данного дифференциального уравнения:

$$z = Axy^{-\frac{1}{3}} - \frac{A^3}{3} y + B.$$

Если выбрать второе из получившихся соотношений (**), то мы придем к системе

$$\frac{x}{yp^2} - y = A, \quad y^2 p^3 + xp + 3yq = 0. \tag{***}$$

Здесь разрешение относительно p, q сложнее. Если ввести посредством преобразования Лежандра p, q как новые независимые переменные, т. е. положить

$$x = P, \quad p = X, \quad y = Y, \quad q = -Q, \quad z = XP - Z,$$

то из уравнений (***) получим:

$$\frac{P}{X^2 Y} - Y = A, \quad Y^2 X^3 + XP - 3YQ = 0.$$

Отсюда находим:

$$P = X^2 Y (Y + A), \quad Q = \frac{1}{3} X^3 (2Y + A). \tag{****}$$

Из первого уравнения (****) имеем:

$$Z = \frac{1}{3} X^3 Y (Y + A) + \Omega (Y),$$

а из второго уравнения (****) следует, что $\Omega' (Y) = 0$, следовательно,

$$Z = \frac{1}{3} X^3 Y (Y + A) + B, \qquad x = P = X^2 Y (Y + A).$$

Наконец, делая обратное преобразование, находим окончательно:

$$z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (y^2 + Ay)^{-\frac{1}{2}} + B.$$

14.9. Метод Якоби для общей системы.

(а) Если дана общая система

$$F^\nu (\boldsymbol{r},\ z,\ \boldsymbol{p}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

то ее можно преобразованием п. 12.3 перевести в систему, в которую искомая функция не входит, и затем после некоторых преобразований типа п. 14.5 (в) применить метод п. 14.7. Тот факт, что искомая функция сама в получающиеся уравнения не входит, несет с собой тот недостаток, что число независимых переменных возрастает на единицу.

(б) Предположим, что система (12) полная, и пусть $m = n + 1$. Пусть, далее, система (12) удовлетворяется функциями

$$z = \psi (\boldsymbol{r}), \quad p_\nu = \psi_\nu (\boldsymbol{r}), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

которые в области $\mathfrak{G} (\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируемы и для которых определитель (после подстановки выражений (20))

$$\frac{\partial (F^1, \ldots, F^{n+1})}{\partial (z, p_1, \ldots, p_n)} \not\equiv 0 \tag{21}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$. Тогда функция ψ дважды непрерывно дифференцируема и $\psi_{x_\nu} = \psi_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), следовательно, ψ — интеграл уравнения (12).

При $m \leqslant n + 1$ имеет место следующее обобщение[1]). Пусть система (12) полная и удовлетворяется функциями

$$z = \psi (\boldsymbol{r}), \quad p_\mu = \psi_\mu (\boldsymbol{r},\ p_m, \ldots, p_n), \ \mu = 1, \ldots, m - 1, \tag{22}$$

которые в области $\mathfrak{G} (\boldsymbol{r},\ p_m, \ldots, p_n)$ непрерывно дифференцируемы и для которых определитель

$$\frac{\partial (F^1, \ldots, F^m)}{\partial (z, p_1, \ldots, p_{m-1})}$$

[1]) См. C. Russyan, Communications Kharkoff (4) 8 (1934), стр. 57—60.

после подстановки выражений (22) ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не равен тождественно нулю. Тогда $z=\psi(\boldsymbol{r})$ — интеграл уравнения (12).

(в) Пусть система (12) полная и $m=n$. Пусть система функций

$$p_\nu = f_\nu(\boldsymbol{r},\ z), \quad \nu=1,\ \ldots,\ n, \tag{23}$$

которые существуют в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\ z)$ и там непрерывно дифференцируемы, обращают уравнения (12) в тождества. Далее, пусть определитель (после подстановки выражений (23))

$$\frac{\partial(F^1,\ \ldots,\ F^n)}{\partial(p_1,\ \ldots,\ p_n)} \not\equiv 0 \tag{24}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$. Тогда система (23), в силу 14.6 (г), инволюционна, а именно имеет специальный вид п. 7.1.

(г) Пусть система (12) в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\ z,\ \boldsymbol{p})$ инволюционна и $m \leqslant n$. Пусть возможно эту систему так дополнить уравнениями

$$F^\nu(\boldsymbol{r},\ z,\ \boldsymbol{p})=0, \quad \nu=m+1,\ \ldots,\ n \quad \text{или} \quad n+1, \tag{25}$$

что получающаяся инволюционная система (12), (25) имеет n или $n+1$ уравнение. В этом случае, можно использовать методы (в) и (б) (разумеется, в случае, если остальные приведенные там предположения выполняются). При этом можно еще заменить нули в правых частях (25) произвольными константами и получить полный интеграл системы (12).

Следовательно, при этом методе существенно суметь найти $n-m$ или $n-m+1$ левых частей уравнений (25). Это делается шаг за шагом, как описано в п. 14.7 (б), только встречающиеся там скобки Пуассона надо заменить скобками Якоби.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Принцип довольно строгой лексикографической упорядоченности, столь необходимый в справочнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям, здесь не нужен. Он заменяется следующим принципом: дифференциальные уравнения в частных производных объединены в отличающиеся друг от друга группы, и эти группы упорядочены с учетом прежнего лексикографического принципа. Для линейных дифференциальных уравнений указывается интегральный базис (главный интеграл), для нелинейных — полный интеграл.

Выражение $\Omega(u_1, \ldots, u_r)$ всегда означает произвольную непрерывно дифференцируемую функцию. У линейных и квазилинейных уравнений для функций от трех независимых переменных последние обозначаются через x, y, z, а искомая функция через $w(x, y, z)$. В других случаях независимые переменные обозначаются через x, y или через $x_1, \ldots, x_n$, искомая функция — через z, а ее производные — через p, q или соответственно $p_1, \ldots, p_n$.

[Более подробные объяснения методов решения конкретных уравнений можно найти в части I и руководствах, указанных там в прим. ред., а также в следующих работах: Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939; Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Л., 1955; И. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. II, М., 1959; А. Ф. Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М., 1961.

При составлении настоящего справочного отдела автором были использованы работы:
A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differential gleichungen, 2 Aufl. Braunschweig, 1912; A. R. Forsyth, Theorie of Differential Equations, Bd. 2—4, Cambridge, 1900—1902; E. Goursat, Leçons sur lintegration des equations aux dérivées partielles du premier ordre, 2 Aufl., Paris, 1921, G. Julia, Exerçices d'Analyse t. 3—4, Paris, 1933, 1935, M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935, а также многие другие зарубежные издания, довольно старые и малодоступные. Ссылки на эти книги и статьи, как правило, опускались. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЛИШЬ ОДНУ ЧАСТНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

1.1. $F(x, y, z, p) = 0.$

Так как в это уравнение входит только одна частная производная z_x, то это дифференциальное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $z(x, y)$, где y играет роль параметра.

[Для решения необходимо привлечь методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной. См. Камке, ч. I, § 3; ч. III, гл. I. — *Прим. ред.*]

1.2. $p = f(x).$

$$z = \int f(x)\,dx + \Omega(y).$$

1.3. $p = f(y).$

$$z = x f(y) + \Omega(y).$$

[**1.3а.** $p = f(x, y, z).$

Решение сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной; y следует рассматривать как параметр. Решение удается выписать явно, если уравнение

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

удается проинтегрировать в квадратурах или известных функциях.

См. Камке, ч. I, § 4; ч. III, гл. I. — *Прим. ред.*]

[**1.3б.** $p = f(x, y).$

$$z = \int f(x, y)\,dx + \Omega(y),$$

при интегрировании y рассматривается как параметр. — *Прим. ред.*]

1.4. $\boldsymbol{xp = y}$.

$$z = y \ln x + \Omega(y).$$

1.5. $\boldsymbol{(ax + by + cz + d)\, p = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}$.

[См. Камке, ч. I, п. 4.6 (в). — *Прим. ред.*]

1.6. $\boldsymbol{(ax + by + cz)^n p = 1}$; $a \neq 0,\ c \neq 0,\ n > -1$.

Ищется интеграл, который при $|x| + |y| \to 0$ также стремится к нулю. Для новой неизвестной функции $u(x, y) = ax + by + cz(x, y)$ из данного дифференциального уравнения получается уравнение

$$\frac{u^n u_x}{au^n + c} = 1,$$

из которого получаем, если принять во внимание начальные условия

$$\int_0^u \frac{u^n\, du}{au^n + c} = x + \Phi(y), \qquad (*)$$

где $\Phi(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0) = 0$. Для достаточно малых $|u|$ разложение подынтегральной функции в ряд и последующее интегрирование дает:

$$\frac{u^{n+1}}{(n+1)\, c} + \ldots = x + \Phi(y).$$

Отсюда видно, что (*) — в самом деле интегралы желаемого вида.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—12. $f(x, y)\,p + g(x, y)\,q = 0$

2.1. $ap + bq = 0.$

Решение см. ч. I, п. 2.4 (а). Можно также сделать преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta),\ \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay;$$

тогда получается уравнение $\zeta_\xi = 0$ и, следовательно,

$$\zeta = \Omega(\eta), \text{ т. е. } \quad z = \Omega(bx - ay).$$

2.2. $axp + byq = 0.$

$z = |x|^b |y|^{-a}$ — главный интеграл; см. ч. I, пп. 2.4 (б), 2.5 (б).

2.3. $ayp + bxq = 0.$

$z = bx^2 - ay^2$ — главный интеграл; см. ч. I, пп. 2.4 (а), 2.5 (а).

2.4. $(a_1x + b_1y + c_1)\,p + (a_2x + b_2y + c_2)\,q = 0.$

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = a_1x + b_1y + c_1, \quad y'(t) = a_2x + b_2y + c_2.$$

Отсюда для любых чисел λ, μ следует:

$$\lambda x' + \mu y' = (a_1\lambda + a_2\mu)\,x + (b_1\lambda + b_2\mu)\,y + c_1\lambda + c_2\mu. \qquad (1)$$

Числа λ, μ могут быть определены так, что для подходящего числа s они являются нетривиальным решением системы

$$a_1\lambda + a_2\mu = s\lambda, \quad b_1\lambda + b_2\mu = s\mu. \qquad (2)$$

Тогда из (1) получается:

$$\lambda x' + \mu y' = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu. \tag{3}$$

Число s при этом надо выбрать так, чтобы оно являлось корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - s & a_2 \\ b_1 & b_2 - s \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

(А) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 \neq 0$. Тогда уравнение (4) имеет два различных корня s_1, s_2 и каждому из них соответствует решение λ_ν, μ_ν системы (2). Далее, если

(Аа) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то $s \neq 0$ и $s_2 \neq 0$, и из уравнений (3) следует:

$$\frac{\lambda_1 x' + \mu_1 y'}{s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + c_1\lambda_1 + c_2\mu_1} = \frac{\lambda_2 x' + \mu_2 y'}{s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + c_1\lambda_2 + c_2\mu_2}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и прийти к функции, которая постоянна вдоль каждой характеристики; получается интеграл

$$z = \frac{|s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|^{s_2}}{|s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2|^{s_1}}.$$

(Аб) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то уравнение (4) имеет корни $s_1 = a_1 + b_2$ и $s_2 = 0$, а уравнения (3) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x' + \mu_1 y' &= s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2, \\ \lambda_2 x' + \mu_2 y' &= \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 = 0$, то последнее уравнение дает интеграл $z = \lambda_2 x + \mu_2 y$.

Если $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 \neq 0$, то оба уравнения (5) можно поделить на это выражение; тогда новые левые части совпадут и образуют интегрируемое уравнение. Из него получается интеграл

$$z = s_1 \frac{\lambda_2 x + \mu_2 y}{\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2} - \ln|s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|.$$

Б) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$. Уравнение (4) имеет двойной корень $s = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$; для этого значения s имеем уравнения (2) и (3) с соответствующими числами λ, μ, не равными нулю одновременно.

(Ба) $s \neq 0$. Тогда можно так выбрать линейную функцию $\alpha x + \beta y + \gamma$, что для каждой характеристической кривой

$$\frac{d}{dt} \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu} = 1. \tag{6}$$

Вследствие (3) в данном случае

$$(\lambda x' + \mu y')(\alpha x' + \beta y') - s(\alpha x + \beta y + \gamma)(\lambda x' + \mu y') = \\ = (\lambda x' + \mu y')[s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu];$$

это соотношение справедливо, если

$$\alpha x' + \beta y' - s(\alpha x + \beta y + \gamma) = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu.$$

После подстановки характеристических уравнений получаем:

$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2) - s(\alpha x + \beta y + \gamma) = \\ = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu.$$

Отсюда для α, β, γ имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} (a_1 - s)\alpha + a_2\beta &= \lambda s, \\ b_1\alpha + (b_2 - s)\beta &= \mu s, \\ c_1\alpha + c_2\beta - s\gamma &= c_1\lambda + c_2\mu. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Так как $s \neq 0$, то из последнего уравнения получаем γ, если оба предшествующих уравнения разрешимы. Определитель коэффициентов левых частей двух первых уравнений (7) равен нулю, и между коэффициентами левых частей существует та же самая зависимость, что и между правыми частями, а именно

$$(a_1 - s)\mu = b_1\lambda, \qquad a_2\mu = (b_2 - s)\lambda.$$

Вследствие того, что $2s = a_1 + b_2$, эти оба уравнения являются просто уравнениями (2). Поэтому числа α, β, γ можно выбрать так, чтобы они не были нулями и удовлетворяли уравнениям (7); следовательно, из (3) и (6) имеем:

$$\frac{\lambda x' + \mu y'}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu} = \frac{d}{dt}\,\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu},$$

а потому

$$z = \ln|s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu| - s\,\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu}$$

— интеграл.

(Бб) $s = 0$. В этом случае главный интеграл уравнения — легко находимый полином не выше второй степени.

2.5. $\boldsymbol{x^2 p + y^2 q = 0}$.

$$z = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

2.6. $\boldsymbol{(x^2 - y^2)p + 2xyq = 0}$.

Характеристические уравнения — окружности $x^2 + y^2 = cy$. Главный интеграл $z = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$.

2.7. $(A_3 x - A_1)\, p + (A_3 y - A_2)\, q = 0.$

$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y$; см. 4.9.

2.8. $ax^m p + by^n q = 0.$

Главный интеграл

$$z = b(n-1)\, x^{1-m} - a(m-1)\, y^{1-n} \quad \text{для} \quad m \neq 1, \quad n \neq 1;$$

$$z = b \ln |x| + \frac{a}{n-1}\, y^{1-n}$$

для $m = 1$, $n \neq 1$, и соответственно для $m \neq 1$, $n = 1$.

2.9. $p \cos y + q \sin x = 0.$

$$z = \cos x + \sin y.$$

2.10. $\sqrt{f(x)}\, p + \sqrt{f(y)}\, q = 0, \quad f(t) = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu t^\nu.$

Частный случай уравнений 2.11, 4.12 (см. также Камке, ч. III, 1.71).

$$z = \left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}}{x - y}\right)^2 - a_4 (x + y)^2 - a_3 (x + y).$$

Замена $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \dfrac{1}{x}$, $\eta = \dfrac{1}{y}$ переводит это уравнение в такое же уравнение с ξ, η, ζ вместо x, y, z и с $f(t) = a_0 t^4 + \ldots + a_4$. Поэтому

$$z = \left(\frac{x^2 \sqrt{f(y)} + y^2 \sqrt{f(x)}}{xy\,(x - y)}\right)^2 - a_0 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - a_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

— тоже интеграл первоначального уравнения, который, естественно, зависит от предыдущего.

2.11. $f(x)\, p + g(y)\, q = 0.$

$$z = \int \frac{dx}{f(x)} - \int \frac{dy}{g(y)} \quad \text{для} \quad f \neq 0, \quad g \neq 0.$$

2.12. $f_y p - f_x q = 0, \quad f = f(x, y).$

Это уравнение означает, что ищутся те непрерывно дифференцируемые функции, для которых функциональный определитель

$$\frac{\partial(z, f)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Согласно ч. I, п. 2.7, это функции, функционально зависящие от f, т. е. все функции вида $\Omega(f(x, y))$.

13—19. $f(x, y)p+g(x, y)q=h(x, y)$

2.13. $ap+bq=c$; Дифференциальное уравнение цилиндрической поверхности (см. ч. I, п. 5.3 (а)).

2.14. $ap+bq=x^2-y^2$.

Если, согласно методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$bx-ay, \qquad 3abz-bx^3+ay^3$$

— его базис. Отсюда получаем интеграл данного неоднородного уравнения

$$z=\frac{1}{3ab}(bx^3-ay^3)+\Omega(bx-ay).$$

Если, согласно методу ч. I. п. 4.2 (б), построить соответствующее двучленное однородное уравнение, то $bx-ay$ — его главный интеграл. Если теперь применить преобразование

$$z(x, y)=\zeta(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x}=bx-ay, \quad \bar{y}=y,$$

то получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b\zeta_{\bar{y}}=\frac{(\bar{x}+a\bar{y})^2}{b^2}-\bar{y}^2,$$

откуда

$$b\zeta=\frac{(\bar{x}+a\bar{y})^3}{3b^2a}-\frac{\bar{y}^3}{3}+\Omega(\bar{x}),$$

что приводит к найденному выше интегралу.

2.15. $ap+bq=f(x)$.

$$z=\frac{1}{a}\int f(x)\,dx+\Omega(bx-ay).$$

Интеграл, который при $x=y$ равен нулю:

$$z=\frac{1}{a}\int\limits_{\frac{bx-ay}{b-a}}^{x} f(t)\,dt.$$

2.16. $xp+yq=ax$.

$$z=ax+\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.17. $xp+yq=a\sqrt{x^2+y^2}$; частный случай уравнения 2.18.

Характеристики — прямые $y=Ax$, $z=a\sqrt{x^2+y^2}+B$.

Интегральные поверхности получаются, например, винтовым движением какой-нибудь из этих прямых вокруг оси z:

$$z = a\sqrt{x^2+y^2} + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.18. $xp + yq = \sqrt{x^2+y^2}\, f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Характеристики

$$y = Ax, \quad z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + B;$$

интегральные поверхности имеют уравнение

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.19. $yp - xq = ye^{x^2+y^2}$.

Преобразованием $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = y$ из данного уравнения получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta_\eta = \pm\frac{\eta}{\sqrt{\xi - \eta^2}}\, e^\xi,$$

откуда

$$z = xe^{x^2+y^2} + \Omega(x^2+y^2).$$

20—31. $f(x, y)\,p + g(x, y)\,q = h_1(x, y)\,z + h_0(x, y)$

2.20. $p + q = az$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное уравнение, то ze^{-ax}, ze^{-ay} — его базис. Поэтому решения данного неоднородного уравнения получаются путем разрешения уравнения

$$\Omega(ze^{-ax},\quad ze^{-ay}) = 0$$

относительно z. Например, получают для конкретных случаев:

если $\Omega(u, v) = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{v} - 1$, то $z = Ae^{ax} + Be^{ay}$;

если $\Omega(u, v) = Au + Bv - 1$, то $\dfrac{1}{z} = Ae^{-ax} + Be^{-ay}$.

Если применить метод ч. I, п. 4.2 (б), то с помощью решения $x - y$ соответствующего однородного уравнения и преобразования

$$z(x, y) = \zeta(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = y$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\zeta_{\bar{y}} = a\zeta, \quad \text{т. е.} \quad \zeta = \Omega(\bar{x})\, e^{a\bar{y}},$$

откуда

$$z = \Omega(x - y)\, e^{ay}.$$

2.21. $p-yq=-z$; частный случай уравнения 2.23.

Интегральная поверхность, проходящая через кривую

$$2(y+z)\operatorname{ch} x=x^2+y^2+1, \quad 2(y+z)\operatorname{sh} x=x^2+y^2-1,$$

или, что то же самое, через кривую

$$yz=0, \quad y+z=e^x,$$

имеет уравнение $z=0$.

2.22. $2p-yq=-z$; частный случай уравнения 2.23.

Если построить, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то $e^x y^2$, $e^x z^2$ — его базис. Решение данного уравнения получается разрешением уравнения

$$\Omega(e^x y^2, \; e^x z^2)=0 \tag{1}$$

относительно z.

Если ищется интегральная поверхность, проходящая через кривую

$$y=xz, \quad x=\ln y, \tag{2}$$

то уравнение (1) должно, в частности, выполняться для кривой (2), т. е. должно быть

$$\Omega(y^3, \; y^3 \ln^{-2} y)=0. \tag{3}$$

В частности, если

$$\Omega(u, v)=-3\sqrt{\frac{v}{u}}+\ln u,$$

то из уравнения (3) получается

$$z=\frac{3y}{x+2\ln y},$$

2.23. $ap+yq=bz$.

$$z=|y|^b\,\Omega(|y|^a e^{-x}).$$

2.24. $x(p-q)=yz$.

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$x+y, \quad z\exp[x-(x+y)\ln x]$$

— его базис. Поэтому интегралами данного дифференциального уравнения являются функции

$$z=\Omega(x+y)\exp[(x+y)\ln x-x].$$

2.25. $xp+yq=az$; дифференциальное уравнение однородных функций порядка a от двух независимых переменных (ср. с уравнением 4.8).

Для $a=2$ интегралами являются функции $z=Ax^2+Bxy+Cy^2$, а также, например, только один раз непрерывно дифференцируемая функция

$$z=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{для} \quad x^2+y^2\neq 0; \\ 0 & \text{для} \quad x=y=0. \end{cases}$$

2.26. $xp+yq=z-x^2-y^2+1.$

Если построить, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{y}{x}, \quad \frac{z+x^2+y^2+1}{x} \left(\text{или } \frac{z+x^2+y^2+1}{y}\right)$$

— его интегральный базис. Следовательно, данное уравнение имеет интеграл

$$z=-x^2-y^2-1+x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.27. $(x-a)p+(y-b)q=z-c$; дифференциальное уравнение конической поверхности с вершиной в точке (a, b, c). См. ч. I, п. 5.3 (б).

2.28. $x(y+1)p+(y^2-x)q=yz$; см. уравнение 4.9, пример 2.

2.29. $x(2y-x+1)p-y(2x-y+1)q=(y-x)z.$

Если построить, пользуясь методом ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{z}{x+y-1}, \quad \frac{(x+y-1)^3}{xy}$$

— его базис. Отсюда получаем интегралы данного уравнения:

$$z=(x+y-1)\Omega\left(\frac{(x+y-1)^3}{xy}\right).$$

2.30. $xy^2p+x^2yq=(x^2+y^2)z.$

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=xy^2, \quad y'(t)=x^2y, \quad z'(t)=(x^2+y^2)z.$$

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$x^2-y^2, \quad \frac{z}{xy}$$

— его базис. Отсюда получаем уравнение интегральной поверхности, для которой характеристики — асимптоты:

$$z=Cxy(x^2-y^2).$$

2.31. $x(x^2+3y^2)p+y(y^2+3x^2)q=2z(x^2+y^2).$

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{xy}{z^2}, \quad \frac{x^2-y^2}{z}$$

— его базис. Интегралы данного дифференциального уравнения получают, разрешая уравнение

$$\Omega\left(\frac{xy}{z^2}, \quad \frac{x^2-y^2}{z}\right)=0$$

относительно z.

Для того чтобы найти интегральную поверхность, проходящую через круг $x^2+y^2=r^2$, $z=a$, функцию $\Omega(u, v)$ нужно определить так, чтобы

$$\Omega(u, v)=0$$

для

$$u=\frac{xy}{z^2}, \quad v=\frac{x^2-y^2}{z}, \quad x^2+y^2=r^2, \quad z=a.$$

Отсюда находят вид функции $\Omega(u, v)$:

$$\Omega(u, v)=4a^4u^2+a^2v^2-r^4,$$

и для получения искомого интеграла остается разрешить относительно z уравнение

$$4a^4x^2y^2+a^2(x^2-y^2)^2z^2=r^4z^4.$$

32—43. $f(x, y)p+g(x, y)q=h(x, y, z)$

2.32. $p+q=e^z\sin(x+y)$.

Если, следуя методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее однородное уравнение, то

$$x-y, \quad 2e^{-z}-\cos(x+y)$$

— его базис. Интегралы данного уравнения получаются разрешением уравнения

$$2e^{-z}=\cos(x+y)+\Omega(x-y).$$

Интегральная поверхность, проходящая через кривую $x+y=0$; $e^z\cos^2 x=1$, имеет вид

$$e^{-z}=\cos x\cos y.$$

2.33. $p+2q=1+\sqrt{y-x-z}$.

Если, следуя методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее однородное уравнение, то

$$\psi_1(x, y, z)=2x-y, \quad \psi_2(x, y, z)=x+2\sqrt{y-x-z}$$

— его интегральный базис.

Если для данного дифференциального уравнения надо найти интеграл $z = \chi_1(x, y)$ с начальным значением $\chi_1(x, x) = 0$, то определяем функцию $\Omega(u, v)$ так, чтобы

$$\Omega(u, v) = 0$$

для

$$u = \psi_1(x, x, 0) = x, \quad v = \psi_2(x, x, 0) = x.$$

Такой функцией является $\Omega = v - u$. Чтобы получить искомый интеграл, соотношение

$$\psi_2 - \psi_1 = y - x + 2\sqrt{y - x - z} = 0$$

разрешаем относительно z.

$$\chi_1(x, y) = y - x - \left(\frac{y - x}{2}\right)^2.$$

Эта функция для $x \geqslant y$ действительно есть интеграл требуемого вида, хотя вычисления, в чем легко убедиться, прежде всего требуют $x > y$.

Если для данного уравнения ищется интеграл $\chi_2(x, y)$ с начальным значением $\chi_2(0, y) = y$, то его получают, разрешая уравнение $\psi_2 = 0$ относительно z:

$$\chi_2(x, y) = y - x - \frac{x^2}{4} \quad \text{для} \quad x \leqslant 0.$$

Но в обоих случаях интеграл $\chi(x, y) = y - x$ также удовлетворяет требуемым условиям. Итак, в обоих случаях имеются **два различных** интеграла требуемого вида. Однако это не противоречит общим теоремам из ч. I, пп. 5.4—5.6, так как там требовалось, чтобы начальные значения и сама функция $z = \chi(x, y)$ принадлежали той области пространства x, y, z, в которой коэффициенты данного дифференциального уравнения имеют непрерывные частные производные первого порядка. Эти условия здесь не выполнены.

2.34. $p + kq = (ax + by + cz)^n$.

Подстановка $u(x, y) = ax + by + cz(x, y)$ приводит к дифференциальному уравнению 2.35

$$u_x + ku_y = cu^n + a + b.$$

2.35. $ap + bq = z^n + c$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение,то

$$bx - ay, \quad a\int \frac{dz}{z^n + c} - x$$

— его базис. Если $z = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$a \int_0^z \frac{dz}{z^n + c} = x, \qquad (1)$$

то

$$z = \varphi(x + \Omega(bx - ay)) \qquad (2)$$

— решение данного дифференциального уравнения. Если $m = -n$ — четное положительное число и $c > 0$, то из (1) следует, что x есть функция от z, производная которой отлична от 0 и которая при $z = 0$ принимает нулевое значение. Следовательно, $\varphi(0) = 0$.

Поэтому подходящим выбором функции Ω можно из формулы (2) получить произвольно много интегралов, которые при $|x| + |y| \to 0$ стремятся к нулю.

2.36. $xp + yq = z - a\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < z^2$.

Из характеристических уравнений

$$x'(t) = x, \quad y'(t) = y, \quad z'(t) = z - a\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$$

следует: $\frac{y}{x} = C_1$. Подставим это соотношение в третье уравнение; тогда при $x > 0$ имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z'(t)}{x'(t)} = \frac{z}{x} - a\sqrt{\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1 - C_1^2},$$

и отсюда для функции $u(x) = z/x$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$xu' + a\sqrt{u^2 - C_1^2 - 1} = 0,$$

интегрируя которое, находим:

$$x^a\left(u + \sqrt{u^2 - C_1^2 - 1}\right) = C_2.$$

Подставив сюда выражения для C_1 и u, находим для соответствующего по ч. I, п. 5.4 однородного уравнения интегральный базис

$$\psi_1 = \frac{y}{x}, \qquad \psi_2 = x^{a-1}\left(z + \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}\right).$$

Кривые $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$ — характеристики данного дифференциального уравнения. При $a = 1$ это параболы, которые касаются конуса $z^2 = x^2 + y^2$; сам этот конус также является интегральной поверхностью данного дифференциального уравнения, но не принадлежит области $z^2 > x^2 + y^2$, в которой коэффициенты имеют непрерывные частные производные.

2.37. $x^2(p-q)=(z-x-y)^2$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то

$$x+y, \qquad \frac{x(z-x-y)}{z-2x-y}$$

— его интегральный базис. Следовательно, интегралы данного дифференциального уравнения — функции

$$z=\frac{(2x+y)\,\Omega(x+y)-x(x+y)}{\Omega(x+y)-x};$$

кроме того, также $z=2x+y$.

2.38. $(x^2+1)p+(y^2+1)q=-y(y^2+1)z^2$.

Если построить, согласно методу ч. I п. 5.4, соответствующее однородное уравнение, то

$$\frac{x-y}{1+xy}, \qquad \frac{2}{z}-y^2$$

— его интегральный базис. Интегралы данного дифференциального уравнения получаются из соотношения

$$\frac{2}{z}=y^2+\Omega\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

2.39. $ax^2p+by^2q=cz^2$, $abc\neq 0$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то

$$\frac{1}{ax}-\frac{1}{by}, \qquad \frac{1}{ax}-\frac{1}{cz}$$

— его интегральный базис. Следовательно, интегралами данного дифференциального уравнения являются функции

$$z=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{ax}+\Omega\left(\frac{1}{by}-\frac{1}{ax}\right)\right)^{-1}.$$

2.40. $(A_1-A_0x)p+(A_2-A_0y)q=f(z)$, $A_\nu=a_\nu+b_\nu x+c_\nu y$.

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному уравнению в смысле ч. I, п. 5.4, есть уравнение 4.11.

2.41. $xy^2p+2y^3q=2(yz-x^2)^2$.

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное уравнение 3.47 имеет интегральный базис

$$\frac{x^2}{\ }, \qquad y\exp\frac{y}{yz-x^2}.$$

Разрешая уравнение

$$\Omega\left(\frac{x^2}{y},\ y\exp\frac{y}{yz - x^2}\right) = 0$$

относительно z, получают решения данного дифференциального уравнения. Кроме того, решением является также функция $z = \frac{x^2}{y}$.

2.42. $(xy + a^2)(xp - yq) = a(x^2 + y^2)z^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного дифференциального уравнения интегральным базисом являются функции

$$xy,\quad \frac{1}{z} + \frac{a}{2}\,\frac{x^2 - y^2}{xy + a^2};$$

интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{2}\,\frac{y^2 - x^2}{xy + a^2} + \Omega(xy).$$

Интегральная поверхность, проходящая через круг $x^2 + y^2 = r^2$, $z = c$, имеет уравнение

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c} + \frac{a}{2}\,\frac{y^2 - x^2}{xy + a^2} \pm \frac{a}{2(xy + a^2)}\sqrt{r^4 - 4x^2y^2}.$$

2.43. $fp + gq = Az^2 + Bz + C$, где f, g, A, B, C — данные функции от x, y.

Если z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре различных интеграла, то их двойное отношение

$$w = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$$

есть решение уравнения

$$fw_x + gw_y = 0.$$

44—59. $f(x, y, z)\,p + g(x, y, z)\,q = h(x, y, z)$; функции f, g линейны относительно z

2.44. $p + zq = 0$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $xz - y$, z составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получают из соотношения

$$\Omega(xz - y,\ z) = 0.$$

Например, если $\Omega(u, v) = av - u - b$ или $\Omega(u, v) = v^2 + u$, то интегралы соответственно таковы:

$$z = \frac{y - b}{x - a},\qquad z = -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4y}.$$

2.45. $zp + q = a.$

Характеристики этого уравнения — параболы

$$z - ay = A, \quad z^2 - 2ax = B.$$

Интегралы получают, разрешая относительно z соотношение

$$\Omega(z^2 - 2ax,\ z - ay) = 0.$$

Например, для линейной функции $\Omega(u, v)$ отсюда получают в качестве полного интеграла параболический цилиндр

$$(z + A)^2 = 2a(x + Ay) + B.$$

2.46. $zp + aq = x.$

Для соответствующего (в смысле п. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$(x + z)\,e^{-\frac{y}{a}}, \quad (x - z)\,e^{\frac{y}{a}}$$

составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$\Omega\left((x + z)\,e^{-\frac{y}{a}},\ (x - z)\,e^{\frac{y}{a}}\right) = 0.$$

2.47. $(1 - z)\,p + (1 + z)\,q = 0.$

Характеристики — прямые

$$(A + 1)\,z + (A - 1)\,y = B, \qquad z = A.$$

Интегралы получают методом ч. I, п. 5.4, разрешая соотношение

$$\Omega(z,\ x(z + 1) + y(z - 1)) = 0$$

относительно z. Интегралами будут, например, функции

$$z = \frac{y - x + C}{y + x}.$$

2.48. $(z + e^x)\,p + (z + e^y)\,q = z^2 - e^{x+y}.$

Подстановка $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = e^x$, $\eta = e^y$ приводит к дифференциальному уравнению 2.56.

$$\xi(\zeta + \xi)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \eta(\zeta + \eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \zeta^2 - \xi\eta.$$

2.49. $(bz - cy + A)\,p + (cx - az + B)\,q = ay - bx + C$; дифференциальное уравнение винтовой поверхности и поверхности вращения см. ч. I, п. 5.3 (в), (г).

2.50. $[b(x+y)-c(x+z)]\,p+[c(y+z)-a(y+x)]\,q=$
$=a(z+x)-b(z+y).$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного дифференциального уравнения функции $ax+by+cz$, $xy+yz+zx$ составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(ax+by+cz,\ xy+yz+zx)=0.$$

2.51. $p-4xzq=2x.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $y+z^2$, x^2-z составляют интегральный базис. Решения данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(y+z^2,\ x^2-z)=0.$$

Найдем интегральную поверхность, проходящую через гиперболу $y+z=5$, $x^2-z^2=9$. Так как гипербола должна удовлетворять этому уравнению, то получаем соотношение

$$\Omega(z^2-z+5,\ z^2-z+9)=0,$$

которое выполняется для $\Omega(u, v)=v-u-4$. Искомое решение z определяется из уравнения

$$x^2-z^2-y-z=4.$$

2.52. $xzp+yzq=xy.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, z^2-xy составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$z^2=xy+\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.53. $xzp+yzq=-x^2-y^2.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, $x^2+y^2+z^2$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z соотношение

$$x^2+y^2+z^2=\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.54. $xzp + yzq = x^2 + y^2 + z^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_2(x, y, z) = \frac{1}{x^2}(z^2 - 2(x^2 + y^2)\ln x)$$

составляют интегральный базис.

Чтобы получить интеграл данного уравнения с начальным значением $z = y^2$ при $x = 1$, так определяют функцию $\Omega(u, v)$, чтобы

$$\Omega(u, v) = 0$$

для

$$u = \psi_1(1, y, y^2) = y, \qquad v = \psi_2(1, y, y^2) = y^4.$$

Таким образом, $\Omega(u, v) = u^4 - v$, и поэтому

$$z^2x^2 = y^4 + 2x^2(x^2 + y^2)\ln x$$

— искомый интеграл.

2.55. $2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$ составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получаются из соотношения

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.56. $x(z + x)p + y(z + y)q = z^2 - xy$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{z}{x} + \ln|y|$, $\frac{z}{y} + \ln|x|$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z соотношение

$$\Omega\left(\frac{z}{x} + \ln|y|, \frac{z}{y} + \ln|x|\right) = 0.$$

2.57. $(A_0x - A_1)p + (A_0y - A_2)q = A_0z - A_3$,
$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z$; см. 4.10.

2.58. $x^2zp + ye^xq = 0$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$z, \; z\ln y - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx$$

составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(z,\ z\ln y-\int\frac{e^x}{x^2}\,dx\right)=0.$$

2.59. $x^2(y-z)\,p+y^2(z-x)\,q=z^2(x-y).$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции xyz, $xy+yz+zx$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(xyz,\ xy+yz+zx)=0.$$

60—65. $f(x, y, z)\,p+g(x, y, z)\,q=h(x, y, z)$; функции f, g по z не выше второй степени

2.60. $(2y^2+z^2)\,xp-(z+3x^3)\,yq=(3x^3z-2y^2)\,z.$

Из характеристических уравнений легко получается, что вдоль каждой характеристики выражение x^3+y^2-z постоянно. Поэтому

$$z=x^3+y^2-C$$

— интеграл данного уравнения.

Интеграл, проходящий через параболу $x=a$, $z=y^2$, получается из общей формулы при $C=a^3$.

2.61. $(x^2-y^2-z^2)\,p+2xyq=2xz.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}$, $\frac{z}{y}$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(\frac{z}{y},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0.$$

2.62. $(3x^2+y^2+z^2)\,yp-2x(x^2+z^2)\,q=2xyz.$

Интегральный базис u, v соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения приведен при рассмотрении уравнения 3.44. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение $\Omega(u, v)=0$.

2.63. $(xy-yz-z^2)\,p+(xz-xy-y^2)\,q=xy+xz+yz+y^2-x^2.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции x^2+y^2+2yz, x^2+z^2+2xy составляют

интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(x^2+y^2+2yz,\ x^2+z^2+2xy)=0.$$

2.64. $x^2z^2p+y^2z^2q=x^2y^2$.

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$z^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^3-3\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)+6\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\Omega\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).$$

Левая часть этого уравнения и аргумент функции Ω справа образуют интегральный базис для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения.

2.65. $xy(xy+2z^2)p+yz(yz-x^2)q=z^2(yz-x^2)$.

Интегралы получают разрешением относительно z уравнения

$$\Omega\left(\frac{z}{y},\ \frac{z^2}{x}+\frac{xz}{y}+y\right)=0.$$

Оба аргумента функции Ω образуют интегральный базис для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения.

66—71. Прочие квазилинейные уравнения

2.66. $(1+\sqrt{z-x-y})p+q=2$.

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(2y-z,\ y+2\sqrt{z-x-y})=0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω. Решением будет также функция $z=x+y$.

2.67. $(x^2+z^2-1)p+(xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})q=0$.

Коэффициенты определены и непрерывно дифференцируемы в области

$$x^2+y^2+z^2>1,\quad z^2<1. \qquad (1)$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$\psi_1(x,\ y,\ z)=z;\quad \psi_2(x,\ y,\ z)=\frac{xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}{x^2+z^2-1}$$

образуют интегральный базис.

Если надо найти интегральную поверхность, проходящую через окружность $x=0$, $y^2+z^2=1$, то применение метода, изложенного в примере ч. I, п. 5.4, невозможно, так как эта

окружность принадлежит границе области (1). Если все-таки действовать по этому методу, то (поскольку поверхность $\psi_2 = 0$ удовлетворяет начальным значениям) для искомого интеграла из уравнения $\psi_2 = 0$ получается уравнение

$$z^2 = 1 - y^2 \quad \text{при} \quad xy < 0.$$

Решением задачи является также $z^2 = 1 - x^2 - y^2$.

2.68. $p + (az^n + b)\,q = c.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(z - cx,\ a\frac{z^{n+1}}{n+1} + bz - cy\right) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

Исследование случая $c = b$ см.: S. Finsterwalder, Zeitschrift für Gletscherkunde 2 (1908), стр. 81—103.

2.69. $(p + kq)(ax + by + cz)^n = 1$; см. уравнение 2.34.

2.70. $[yf(z) - x]\,p + yq = 0.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(z,\ 2xy - y^2 f(z)) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

2.71. $f_y(x, y, z)\,p - f_x(x, y, z)\,q = 0,\ |f_x| + |f_y| > 0.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(z,\ f(x, y, z)) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

Можно предложить иной путь решения. Согласно ч. I, п. 2.7, данное уравнение означает, что функции $z(x, y)$ и $f(x, y, z(x, y))$ для искомого интеграла $z(x, y)$ должны быть функционально зависимыми, так как

$$\frac{\partial(z, f)}{\partial(x, y)} = z_x(f_y + f_z z_y) - z_y(f_x + f_z z_x) = f_y z_x - f_x z_y.$$

При этом снова получается уже найденное выражение для интегралов.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—19. $f(x, y, z)\,w_x + g(x, y, z)\,w_y + h(x, y, z)\,w_z = 0$; функции f, g, h степени не выше первой

1—6. Одночленные коэффициенты

3.1. $aw_x + bw_y + cw_z = 0$.

$bx - ay$, $cx - az$ — интегральный базис.

3.2. $aw_x + byw_y + czw_z = 0$.

$y^a e^{-bx}$, $z^a e^{-cx}$ — интегральный базис.

3.3. $w_x + bzw_y + cyw_z = 0$.

Интегральный базис: $cy^2 - bz^2$ и, кроме того, $(cy + Az)\,e^{-Ax}$, $A = \sqrt{bc}$, если $bc > 0$; $cy \cos Ax + Az \sin Ax$, $A = \sqrt{-bc}$, если $bc < 0$.

3.4. $xw_x + byw_y + czw_z = 0$.

Интегральный базис $\frac{x^b}{y}$, $\frac{x^c}{z}$. Если, в частности, $b = c = 1$, то это уравнение для однородных функций нулевого порядка; интегральный базис в этом случае: $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$.

3.5. $xw_x + bzw_y + cyw_z = 0$.

Интегральный базис: $cy^2 - bz^2$ и, кроме того, $\frac{cy - \alpha z}{x^\alpha}$, $\alpha = \sqrt{bc}$, если $bc > 0$;

$$x^\alpha \exp\left(-\operatorname{arctg} \frac{\alpha z}{cy}\right), \quad \alpha = \sqrt{-bc}, \quad \text{если} \quad bc < 0.$$

3.6. $zw_x - xw_y + yw_z = 0$.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = z, \quad y'(t) = -x, \quad z'(t) = y.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 1 \\ -1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = -s^3 - 1$$

имеет различные корни: -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$; поэтому это уравнение может быть решено тем же методом, что и уравнение 3.19.

7—11. Двучленные коэффициенты

3.7. $yw_x + xw_y - (x+y)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $x+y+z$, x^2-y^2.

3.8. $xw_x + (y+z)(w_y - w_z) = 0.$

Интегральный базис: $y+z$, $x\exp\left(-\frac{y}{y+z}\right)$.

3.9. $xw_x + (y+z)\,w_y + (y-z)\,w_z = 0$, частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = x, \quad y'(t) = y+z, \quad z'(t) = y-z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & 1 & -1-s \end{vmatrix} = (1-s)(s^2-2)$$

имеет три различных корня. Методом, которым решается уравнение 3.19, может быть получен интегральный базис:

$$\left[y + \left(\sqrt{2}-1\right)z\right]x^{-\sqrt{2}}, \quad \left[y - \left(\sqrt{2}+1\right)z\right]x^{\sqrt{2}}.$$

Интегралом будет, в частности, функция $w = y^2 - 2yz - z^2$.

3.10. $(y-2z)\,w_x + (3z-x)\,w_y + (2x-3y)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $3x+2y+z$, $x^2+y^2+z^2$.

3.11. $bc(y-z)\,w_x + ca(z-x)\,w_y + ab(x-y)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $ax+by+cz$, $ax^2+by^2+cz^2$.

12—19. Трехчленные коэффициенты

3.12. $xw_x + (ax+by)\,w_y + (cx+dy+fz)\,w_z = 0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=x, \quad y'(t)=ax+by, \quad z'(t)=cx+dy+fz.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ a & b-s & 0 \\ c & d & f-s \end{vmatrix} = (1-s)(b-s)(f-s)$$

имеет корни 1, b, f. Далее см. 3.19.

3.13. $czw_x+(ax+by)w_y+(ax+by+cz)w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения

$$x'(t)=cz, \quad y'(t)=ax+by, \quad z'(t)=ax+by+cz.$$

Из них следует, что $x'+y'-z'=0$, т. е. $\psi_1=x+y-z$ — интеграл данного уравнения. Для того чтобы применить изложенное в ч. I, п. 3.5 (в), положим $z-x-y=C$. Тогда из написанных выше характеристических уравнений получаются следующие уравнения:

$$x'=c(x+y+C), \quad y'=ax+by,$$

являющиеся характеристическими для дифференциального уравнения

$$c(x+y+C)\frac{\partial w}{\partial x}+(ax+by)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Если их решить, согласно ч. I, п. 2.4, и подставить в решение еще $C=z-x-y$, то мы получим еще один, не зависящий от ψ_1 интеграл.

Если $\rho^2=4ac+(b-c)^2\neq 0$, то находим, например, что

$$\psi_2=\frac{2acz+(b-c-\rho)(ax+by)}{2acz+(b-c+\rho)(ax+by)}\{acz^2+ \\ +(b-c)(ax+by)z-(ax+by)^2\}^{\frac{\rho}{b+c}},$$

если $a\neq b$, и

$$\psi_2=\{a(x+y)+cz\}\exp\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\frac{cy-ax}{z-x-y}\right\}, \quad \text{если} \quad a=b.$$

3.14. $2(x-y)w_x-(x-y-z)w_y-(x-y-3z)w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=2x-2y, \quad y'(t)=-x+y+z, \quad z'(t)=-x+y+3z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 2-s & -2 & 0 \\ -1 & 1-s & 1 \\ -1 & 1 & 3-s \end{vmatrix} = -s(s-2)(s-4)$$

имеет три различных корня. Далее см. 3.19.

3.15. $\mathbf{2(y-z)\, w_x - (4x-3y-z)\, w_y + (12x-3y-9z)\, w_z = 0}$; частный случай уравнения 3.19.

Интегральный базис:

$$3x - 3y - z, \quad \frac{(8x-5y-3z)^2}{2x-y-z}.$$

3.16. $\mathbf{(6x-4y+2z)\, w_x - (4x-10y+6z)\, w_y + (2x-6y+11z)\, w_z = 0}$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = 6x - 4y + 2z, \quad y'(t) = -4x + 10y - 6z,$$
$$z'(t) = 2x - 6y + 11z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 6-s & -4 & 2 \\ -4 & 10-s & -6 \\ 2 & -6 & 11-s \end{vmatrix} = -(s-3)(s-6)(s-18)$$

имеет различные корни. Для каждого из этих корней s можно так определить числа α, β, γ, что из написанных выше характеристических уравнений будет следовать равенство

$$\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = s(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Таким образом, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{2x' + 2y' + z'}{3(2x+2y+z)} = \frac{-2x' + y' + 2z'}{6(-2x+y+2z)} = \frac{x' - 2y' + 2z'}{18(x-2y+2z)}.$$

Интегрированием этих уравнений получают интегральный базис

$$\frac{(2x+2y+z)^2}{2x-y-2z}, \quad \frac{(2x-y-2z)^3}{x-2y+2z}.$$

3.17. $\mathbf{(ax+y-z)\, w_x - (x+ay-z)\, w_y + (a-1)(y-x)\, w_z = 0}$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = ax + y - z, \quad y'(t) = -x - ay + z,$$
$$z'(t) = (1-a)\,x + (a-1)\,y.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} a-s & 1 & -1 \\ -1 & -a-s & 1 \\ 1-a & a-1 & -s \end{vmatrix} = -s\,[s^2-(a+3)(a-1)].$$

Далее см. 3.19.

Можно также использовать то, что выражение $z+y+x$ — интеграл, и применить редукцию, согласно ч. I, п. 3.5.

3.18. $(Ax+cy+bz)\,w_x+(cx+By+az)\,w_y+(bx+ay+Cz)\,w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=Ax+cy+bz, \quad y'(t)=cx+By+az,$$
$$z'(t)=bx+ay+Cz.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} A-s & c & b \\ c & B-s & a \\ b & a & C-s \end{vmatrix} = (A-s)(B-s)(C-s) -$$
$$-[a^2(A-s)+b^2(B-s)+c^2(C-s)]+2abc.$$

Далее см. 3.19.

3.19. $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)\,w_x+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\,w_y+$
$+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)\,w_z=0.$

Ср. с 2.4. Характеристическая система:

$$\begin{cases} x'(t)=a_1x+b_1y+c_1z+d_1, \\ y'(t)=a_2x+b_2y+c_2z+d_2, \\ z'(t)=a_3x+b_3y+c_3z+d_3. \end{cases}$$

Решения этой системы зависят от корней характеристического определителя[1])

$$\begin{vmatrix} a_1-s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-s \end{vmatrix}.$$

---

[1]) [См. Петровский, стр. 170—174; Степанов, стр. 283—297; Камке, стр. 90. — *Прим. ред.*]

Если s — его корень, то можно найти числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, для которых

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \alpha s,$$
$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \beta s,$$
$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = \gamma s.$$

Тогда из характеристических уравнений следует, что

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = s(\alpha x + \beta y + cz) + D, \qquad (1)$$

где

$$D = \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3.$$

Если $s = D = 0$, то отсюда получают интеграл $\alpha x + \beta y + \gamma z$ уравнения в частных производных.

Если характеристический определитель имеет два отличных друг от друга и от нуля корня s_1, s_2, то получают два уравнения типа (1), а из них — соотношение

$$\frac{\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z'}{s_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + D_1} = \frac{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'}{s_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + D_2},$$

которое дает

$$\frac{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + D_1/s_1)^{s_2}}{(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + D_2/s_2)^{s_1}} = \text{const};$$

левая часть в этом равенстве — интеграл уравнения в частных производных.

Если характеристический определитель имеет три различных корня, то можно таким образом получить интегральный базис. Если имеются кратные корни, то в этом случае можно применить метод ч. I, п. 2.4. Впрочем, в этом случае можно решать систему характеристических уравнений и исключением t из решений находить интегралы уравнения в частных производных.

20—41. $f(x, y, z)\, w_x + g(x, y, z)\, w_y + h(x, y, z)\, w_z = 0$; функции f, g, h степени не выше второй

20—27. Одночленные коэффициенты

3.20. $aw_x + xzw_y - xyw_z = 0$.

С помощью метода, приведенного в ч. I, п. 3.5 (6), получают интегральный базис:

$$y^2 + z^2, \quad y \sin\frac{x^2}{2a} + z\cos\frac{x^2}{2a}.$$

Второй интеграл также можно заменить на $x^2 + 2a \operatorname{arctg}\frac{z}{y}$.

3.21. $x^2w_x - xyw_y - y^2w_z = 0$.

Интегральный базис: xy, $3xyz - y^3$.

3.22. $ax^2w_x + by^2w_y + cz^2w_z = 0$.

Любые две из функций

$$\frac{1}{by} - \frac{1}{ax}, \quad \frac{1}{cz} - \frac{1}{by}, \quad \frac{1}{ax} - \frac{1}{cz}$$

образуют интегральный базис.

3.23. $x^2w_x + z^2w_y + 2xzw_z = 0$.

Интегральный базис: $\frac{x^2}{z}$, $y - \frac{z^2}{3x}$.

3.24. $xyw_x + yzw_y + y^2w_z = 0$.

Интегральный базис: $y^2 - z^2$, $\frac{y+z}{x}$.

3.25. $xzw_x + yzw_y + xyw_z = 0$.

Интегральный базис: $\frac{y}{x}$, $z^2 - xy$.

3.26. $y^2w_x - xyw_y + 3xzw_z = 0$.

Интегральный базис: $x^2 + y^2$, y^3z.

3.27. $yzw_x - 2xzw_y - 2xyw_z = 0$.

Интегральный базис: $2x^2 + y^2$, $2x^2 + z^2$.

28—38. Двучленные коэффициенты

3.28. $xw_x + yw_y + (x^2 + y^2)\,w_z = 0$.

Интегральный базис: $x^2 + y^2 - 2z$, $\frac{y}{x}$.

3.29. $3zw_x - (2x - 1)\,yw_y + (2x - 1)\,zw_z = 0$.

Интегральный базис: yz, $x^2 - x - 3z$.

3.30. $xyw_x + x^2w_y - (2x + z)\,yw_z = 0$.

Интегральный базис: $x^2 - y^2$, $z^2 + xz$.

3.31. $xyw_x + y\,(y - a)\,w_y + z\,(y - a)\,w_z = 0$.

Интегральный базис: $\frac{y}{z}$, $\frac{y-a}{x}$.

3.32. $xzw_x + 2xyw_y - (2x + z)\,zw_z = 0$.

Интегральный базис: $x\,(x + z)$, xyz.

3.33. $xzw_x - yzw_y + (y^2 - x)\,w_z = 0$; см. ч. I, п. 3.3 (б).

3.34. $2xzw_x - 2yzw_y + (3y^2 - x)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: xy, $2x + 3y^2 + 2z^2$.

3.35. $x(y - z)\,w_x + y(z - x)\,w_y + z(x - y)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $x + y + z$, xyz.

3.36. $(xz + y^2)\,w_x + (yz - 2x^2)\,w_y - (2xy + z^2)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $2xz - y^2$, $x^2 + yz$.

3.37. $bc(x^2 - a^2)\,w_x + c(bxy + acz)\,w_y + b(cxz + aby)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{by + cz}{x - a}$, $\dfrac{by - cz}{x + a}$.

Характеристики задают двухпараметрическое семейство прямых

$$by + cz = C_1(x - a), \quad by - cz = C_2(x + a)$$

в пространстве x, y, z.

3.38. $a(y^2 + z^2)\,w_x + x(bz - ay)\,w_y - x(by + az)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 + y^2 + z^2$, $2a \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + b \ln (y^2 + z^2)$.

39—41. Трехчленные коэффициенты

3.39. $xzw_x + yzw_y + (ax^2 + ay^2 + bz^2)\,w_z = 0.$

Из характеристических уравнений следуют соотношения

$$xy' - x'y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{zz'}{ax^2 + ay^2 + bz^2}.$$

Второе из этих уравнений можно легко проинтегрировать, если сделать подстановку $x^2 + y^2 = u$, $z^2 = v$. Для исходного уравнения в частных производных получается интегральный базис

$$\frac{y}{x}, \quad \frac{a(x^2 + y^2) + (b - 1)z^2}{(x^2 + y^2)^b}.$$

Во второй функции знаменатель может быть также заменен на x^{2b}.

3.40. $2xzw_x + 2yzw_y + (z^2 - x^2 - y^2)\,w_z = 0$; частный случай уравнения 3.39.

Интегральный базис: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$, $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$.

3.41. $(A_0x - A_1)\,w_x + (A_0y - A_2)\,w_y + (A_0z - A_3)\,w_z = 0;$
$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z$; см. 4.9.

42—59. $f(x, y, z)w_x + g(x, y, z)w_y + h(x, y, z)w_z = 0$; прочие случаи

3.42. $y^2zw_x + xz^2w_y - xy^2w_z = 0$.

Интегральный базис: $x^2 + z^2$, $y^3 + z^3$.

3.43. $x(by^2 - cz^2)w_x + y(cz^2 - ax^2)w_y + z(ax^2 - by^2)w_z = 0$.

Интегральный базис: $ax^2 + by^2 + cz^2$, xyz.

3.44. $(3x^2 + y^2 + z^2)yw_x - 2(x^2 + z^2)xw_y + 2xyzw_z = 0$.

Интегральный базис: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{z}$, $\dfrac{2x^2 + y^2}{z^2}$.

3.45. $[(x^2 + y^2 - 1)x + y]w_x + [(x^2 + y^2 - 1)y - x]w_y + 2zw_z = 0$.

Этот пример имеет принципиальное значение. Получается небольшое формальное упрощение, если уравнение умножить на -1. Характеристические уравнения после этого примут вид

$$x'(t) = (1 - x^2 - y^2)x - y, \quad y'(t) = (1 - x^2 - y^2)y + x, \quad z'(t) = -2z. \tag{1}$$

Точка покоя этой системы: $x = y = z = 0$. Кроме этого тривиального решения, система (1) имеет, например, решения

$$x = y = 0, \quad z = Ce^{-2t},$$

т. е. обе половины оси z. Если отбросить все три эти случая, то для каждого решения будет справедливо неравенство $x^2 + y^2 \neq 0$.

Введем полярные координаты, т. е. выберем для каждого решения $x(t)$, $y(t)$ двух первых уравнений системы (1) непрерывно дифференцируемые функции $r(t) > 0$, $\vartheta(t)$ такие, чтобы

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Тогда из системы (1) получаем новую систему

$$r' = (1 - r^2)r, \quad \vartheta' = 1, \quad z' = -2z. \tag{2}$$

Очевидно, что можно выбрать $\vartheta = t$. Все решения системы (2) тогда имеют вид

$$1 - \frac{1}{r^2} = C_1e^{-2t}, \quad z = C_2e^{-2t}.$$

Для $C_1 = C_2 = 0$ это окружность $r = 1$, $z = 0$. Для $C_1 \neq 0$ каждая из кривых асимптотически стремится к этой окружности при $t \to \infty$ как винтовая линия или спираль. Кривые, у которых $C_1 < 0$, $C_2 > 0$, неограниченно приближаются к положительной полуоси z при $t \to -\infty$.

Если из всего пространства x, y, z вынута отрицательная полуось z вместе с нулевой точкой, то исходное дифференциальное уравнение с частными производными не имеет особых точек, т. е. все три его коэффициента нигде не обращаются в нуль одновременно. Тем не менее это дифференциальное уравнение, кроме тривиальных интегралов $z = \text{const}$, не имеет ни одного интеграла, который существовал бы во всей только что указанной односвязной области.

В самом деле, каждый интеграл постоянен вдоль каждой характеристики. Если интеграл имеет на окружности $r = 1$ значение C, то, так как винтовые и спиралевидные кривые произвольно близко подходят к этому кругу, он должен иметь то же значение C также и на всех этих кривых, и таким образом — также на положительной полуоси z. Следовательно, он имеет значение C на всех характеристиках в рассматриваемой области и, таким образом, во всей этой области.

Этот пример, автором которого является E. Digel, был опубликован E. Kamke, Math. Zeitschrift 42 (1937), стр. 288. Аналогичный пример построил T. Ważewski, Mathematica 9 (1935), стр. 179.

3.46. $2xzw_x + y(z+1)w_y + xy(z+1)^2 w_z = 0.$

Положим $w(x, y, z) = \zeta(x, s, z)$, где $s = xy$. Тогда дифференциальное уравнение для ζ имеет решение $z - s$. Метод редукции ч. I, п. 3.5 теперь дает для исходного уравнения интегральный базис:

$$z - xy, \quad \frac{z - xy}{(z - xy + 1)^2} \ln \frac{xy}{z+1} - \frac{1}{(z+1)(z - xy + 1)} - \frac{1}{2} \ln x.$$

3.47. $xy^2 w_x + 2y^3 w_y + 2(yz - x^2)^2 w_z = 0.$

Частное решение: $\frac{x^2}{y}$. Если к уравнению применить метод редукции ч. I, п. 3.5, подставив $w(x, y, z) = v(x, \eta, z)$, $\eta = \frac{x^2}{y}$, то оно перейдет в уравнение

$$xv_x + 2(z - \eta)^2 v_z = 0$$

с решением $x^2 \exp \frac{1}{z - \eta}$. Поэтому данное уравнение имеет интегральный базис

$$\frac{x^2}{y}, \quad y \exp \frac{y}{zy - x^2}.$$

3.48. $x(y^3 - 2x^3) w_x + y(2y^3 - x^3) w_y + 9z(x^3 - y^3) w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^3 y^3 z$, $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$

3.49. $x^2(xy-z^2)w_x+xy(xy-z^2)w_y+yz(yz+2x^2)w_z=0.$

Интегральный базис: $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{x^2y+y^2z+z^2x}{yz}$.

3.50. $x(z^4-y^4)w_x+y(x^4-2z^4)w_y+z(2y^4-x^4)w_z=0.$

Интегральный базис: $x^4+y^4+z^4$, x^2yz.

3.51. $x(y^n-z^n)w_x+y(z^n-x^n)w_y+z(x^n-y^n)w_z=0.$

Интегральный базис: xyz, $x^n+y^n+z^n$.

3.52. $xw_x+yw_y+a\sqrt{x^2+y^2}\,w_z=0.$

Интегральный базис: $\dfrac{y}{x}$, $a\sqrt{x^2+y^2}-z$.

3.53. $xw_x+yw_y+\left(z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)w_z=0.$

Первые два из характеристических уравнений

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,\quad z'(t)=z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

дают $\dfrac{y}{x}=C_1$, т. е. $\psi_1=\dfrac{y}{x}$ — интеграл. Если подставить в третье характеристическое уравнение $y=C_1x$, то для $x>0$ получаем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}-a\sqrt{C_1^2+1+\left(\frac{z}{x}\right)^2},$$

и отсюда, полагая $z=xu(x)$, находим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$xu'+a\sqrt{u^2+C_1^2+1}=0.$$

Из этого уравнения имеем:

$$x^a\left(u+\sqrt{u^2+C_1^2+1}\right)=C_2.$$

Подстановка выражений для C_1 и u приводит к интегралу

$$\psi_2=x^{a-1}\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right);$$

ψ_1 и ψ_2 образуют интегральный базис.

3.54. $z\sqrt{y^2+z^2}\,w_x+az\sqrt{x^2+z^2}\,w_y-$
$-\left(x\sqrt{y^2+z^2}+ay\sqrt{x^2+z^2}\right)w_z=0.$

Из характеристических уравнений находим, что

$$xx'+yy'+zz'=0,$$

следовательно,

$$\psi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

— интеграл. Если теперь заменить $x^2+y^2+z^2=r^2$ (см. ч. I, п. 3.5 (в)) и исключить z из характеристических уравнений, то получим уравнение

$$\frac{ax'}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{y'}{\sqrt{r^2-y^2}},$$

а отсюда — интеграл

$$\psi_2 = a \arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{y}{r}, \quad \text{где} \quad r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Оба найденных интеграла ψ_1 и ψ_2 образуют базис.

3.55. $w_x - y w_y \operatorname{ctg} x + z w_z \operatorname{ctg} x = 0$.

Интегральный базис: yz, $y \sin x$.

3.56. $w_x \operatorname{tg} x + w_y \operatorname{tg} y + w_z \operatorname{tg} z = 0$.

Интегральный базис: $\dfrac{\sin x}{\sin y}$, $\dfrac{\sin y}{\sin z}$.

3.57. $w_x \operatorname{ctg} x + w_y \operatorname{ctg} y + w_z \operatorname{ctg} z = 0$.

Интегральный базис: $\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $\dfrac{\cos y}{\cos z}$.

3.58. $x w_x + y w_y + [z + f(x, y)]\, w_z = 0$.

Из характеристических уравнений

$$x'(t)=x, \quad y'(t)=y, \quad z'(t)=z+f(x, y)$$

прежде всего получаем $\dfrac{y}{x}=C_1$. Следовательно, $\psi_1(x, y, z)=\dfrac{y}{x}$ — интеграл. Тогда из третьего характеристического уравнения имеем:

$$z'(t)=z+f(x, C_1 x),$$

а после присоединения к этому уравнению первого характеристического уравнения получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}+\frac{f(x, C_1 x)}{x}.$$

Отсюда

$$z=C_2 x + x\int_a^x \frac{f(t, C_1 t)}{t^2}\,dt.$$

Следовательно, если подставить выражение для C_1, то

$$z=C_2 x + x\int_a^x f\left(t, \frac{y}{x} t\right) t^{-2}\,dt. \qquad (1)$$

Функция $\psi_2(x, y, z)$, получающаяся после разрешения этого уравнения относительно C_2, является вторым интегралом исходного уравнения.

Если, например,

$$f(x, y) = \frac{cxy}{\sqrt{(c^2+x^2)(c^2+y^2)}},$$

то при $a=0$ уравнение (1) имеет вид

$$z = C_2 x + cy \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(c^2+t^2)\left(c^2+\frac{y^2t^2}{x^2}\right)}}$$

или после замены переменных $t = x\xi$

$$z = C_2 x + cxy \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(c^2+x^2\xi^2)(c^2+y^2\xi^2)}};$$

это эллиптический интеграл с постоянными пределами интегрирования.

3.59. $(y-z)\sqrt{f(x)}\,w_x + (z-x)\sqrt{f(y)}\,w_y + (x-y)\sqrt{f(z)}\,w_z = 0$, $f(t) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu t^\nu$.

Функция

$$w = \left(\frac{(y-z)\sqrt{f(x)}+(z-x)\sqrt{f(y)}+(x-y)\sqrt{f(x)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right)^2 - \\ - a_6(x+y+z)^2 - a_5(x+y+z)$$

является интегралом. Замена

$$w(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z}$$

исходное уравнение переводит в такое же уравнение относительно ξ, η, ζ, W вместо x, y, z, w и с $f^*(t) = a_0 t^6 + \ldots + a_6$. Поэтому функция

$$w = \left(\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{f(x)}+z^2x^2(z-x)\sqrt{f(y)}+x^2y^2(x-y)\sqrt{f(z)}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right)^2 - \\ - a_0\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

является также (вообще говоря, не зависящим от прежнего) интегралом дифференциального уравнения; в этой формуле $f(t)$ снова имеет первоначальное значение. См. также 4.12.

60—64. Общие линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения

3.60. $2xw_x + 3yw_y + 6zw_z = 6$.

Частное решение: $\ln|z|$. Присоединяя к нему все решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, получают все решения; интегральным базисом однородного уравнения являются функции

$$\frac{x^3}{z}, \quad \frac{y^2}{z}.$$

3.61. $x^2w_x + y^2w_y + z^2w_z = xyz$.

Интегральный базис соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z}.$$

Согласно ч. I, п. 4.2, частное решение данного уравнения имеет вид

$$w = xyz\left(\frac{x\ln x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y\ln y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z\ln z}{(z-x)(z-y)}\right). \quad (1)$$

Все решения данного уравнения получают, присоединяя к решению (1) все решения однородного уравнения.

3.62. $xw_x + yw_y + zw_z = aw + f(x, y, z)$.

Для соответствующего однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ образуют интегральный базис. Если (ср. ч. I, п. 4.2) произвести замену

$$w(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \zeta = \frac{z}{x},$$

то из данного уравнения получится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W_\xi - \frac{a}{\xi}W = \frac{1}{\xi}f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta),$$

и, следовательно,

$$W = \xi^a\left\{\Omega(\eta, \zeta) + \int \xi^{-a-1}f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta)\,d\xi\right\}.$$

3.63. $(y + z + w)w_x + (z + x + w)w_y + (x + y + w)w_z = 0$.

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное дифференциальное уравнение для $W = W(x, y, z, w)$ имеет вид

$$(y + z + w)W_x + (z + x + w)W_y + (x + y + w)W_z = 0. \quad (1)$$

Его характеристические уравнения

$$x'(t) = y + z + w, \quad y'(t) = z + x + w,$$
$$z'(t) = x + y + w, \quad w'(t) = 0$$

дают интегрируемую систему

$$-\frac{x' + y' + z' + \frac{3}{2} w'}{x + y + z + \frac{3}{2} w} = 2\frac{x' - y'}{x - y} = 2\frac{y' - z'}{y - z}.$$

Так как очевидно, что $W = w$ — интеграл, то интегралами однородного уравнения (1) являются функции

$$W = \Omega\left(\frac{x - y}{y - z},\ w,\ (x - y)^2\left(x + y + z + \frac{3}{2} w\right)\right).$$

Разрешая уравнение $W = 0$ относительно w, получают решения исходного уравнения.

3.64. $(zw - xy^2)\, w_x + yzw_y + z^2 w_z = zw.$

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное уравнение есть уравнение 4.5. Поэтому интеграл данного уравнения получится, если разрешить уравнение

$$\Omega\left(\frac{w}{y},\ \frac{z}{y},\ \left(x - \frac{zw}{y^2}\right)\exp\frac{y^2}{z}\right) = 0$$

относительно w. Интегралом является также функция $w = \frac{xy^2}{z}$; она обращает в нуль первый коэффициент уравнения.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧЕТЫРЬМЯ И БОЛЕЕ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

4.1. $p_1 + (x_3 - x_4) p_2 + (x_1 + x_2 + x_3) p_3 + (x_1 + x_2 + x_4) p_4 = 0.$

Интегральный базис:

$$x_2 - x_3 + x_4, \quad (x_3 - x_4) e^{-x_1},$$
$$(x_1 x_3 - x_1 x_4 - x_1 - x_2 - x_4 - 1) e^{-x_1}.$$

4.2. $x_1 p_1 + (x_3 + x_4) p_2 + (x_2 + x_4) p_3 + (x_2 + x_3) p_4 = 0.$

Интегральный базис: $x_1 (x_2 - x_3)$, $x_1 (x_2 - x_4)$, $\dfrac{x_2 + x_3 + x_4}{x_1^2}$.

4.3. $(x_2 + x_3 + x_4) p_1 + (x_1 + x_3 + x_4) p_2 + (x_1 + x_2 + x_4) p_3 + {}$
$+ (x_1 + x_2 + x_3) p_4 = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$, $\dfrac{x_4 - x_3}{x_4 - x_1}$, $(x_4 - x_1)^3 \times$ $\times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

4.4. $x_1 x_3 p_1 + x_2 x_3 p_2 + x_3^2 p_3 + (x_1 x_2 + a x_3 x_4) p_4 = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{x_2}{x_1}$, $\dfrac{x_3}{x_1}$, $x_1^{1-a} \dfrac{x_2}{x_3} + (a - 1) x_4 x_1^{-a}$.

4.5. $(x_3 x_4 - x_1 x_2^2) p_1 + x_2 x_3 p_2 + x_3^2 p_3 + x_3 x_4 p_4 = 0.$

Очевидные интегралы: $\dfrac{x_3}{x_2}$, $\dfrac{x_4}{x_2}$. Далее, методом редукции ч. I, п. 3.5 находим интеграл

$$\left(x_1 - \frac{x_3 x_4}{x_2^2} \right) \exp \frac{x_2^2}{x_3}.$$

Три найденных интеграла образуют базис.

4.6. $x_2 x_3 x_4 p_1 + x_3 x_4 x_1 p_2 + x_4 x_1 x_2 p_3 + x_1 x_2 x_3 p_4 = 0.$

Интегральный базис: $x_1^2 - x_2^2$, $x_2^2 - x_3^2$, $x_3^2 - x_4^2$.

4.7. $(x_2+x_3+x_4+x_5)p_1+(x_3+x_4+x_5+x_1)p_2+$
$+(x_4+x_5+x_1+x_2)p_3+(x_5+x_1+x_2+x_3)p_4+$
$+(x_1+x_2+x_3+x_4)p_5=0.$

Интегральный базис:

$$\frac{s-5x_\nu}{s-5x_{\nu+1}}, \quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где $s=x_1+\ldots+x_5$. См. также 4.3.

4.8. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu = az$; уравнение однородных функций.

Интегралы в области $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_n)$ — однородные порядка a функции $z=\psi(x_1, \ldots, x_n)$ с непрерывными частными производными первого порядка.

Как известно, функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ в области $\mathfrak{G}$ называется *однородной порядка* a, если для каждых двух точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(tx_1, \ldots, tx_n)$, принадлежащих области $\mathfrak{G}$ вместе с соединяющим их отрезком, можно написать равенство

$$\psi(tx_1, \ldots, tx_n)=t^a\psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Пример однородной функции первого порядка, которая не является полиномом: $\psi(x, y)=x\sin\frac{y}{x}$.

4.9. $\sum\limits_{\nu=1}^{m}(A_0x_\nu-A_\nu)p_\nu=0,\ A_\nu=a_{\nu0}+\sum\limits_{\varkappa=1}^{m}a_{\nu\varkappa}x_\varkappa$; уравнение Хессе.

Это уравнение можно свести к уравнению с $m+1$ независимой переменной, но с линейными коэффициентами. Именно, сделаем замену (введем *однородные координаты*)

$$z(x_1, \ldots, x_m)=\zeta(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m),$$

где

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, x_m=\frac{\xi_m}{\xi_0}; \tag{1}$$

тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=\xi_0\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu}, \quad \nu=1, \ldots, m, \quad \sum_{\nu=1}^{m}x_\nu\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=-\xi_0\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0},$$

и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$\sum_{\nu=0}^{m}A_\nu^*\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu}=0, \quad \text{где} \quad A_\nu^*=\sum_{\varkappa=0}^{m}a_{\nu\varkappa}\xi_\varkappa. \tag{2}$$

Каждое решение исходного уравнения дает такое решение $\zeta(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ уравнения (2), что из функции ζ подстановкой (1) получается функция от $x_1, \ldots, x_m$, т. е. ζ — однородная функция нулевого порядка. Наоборот, каждое решение ζ уравнения (2), которое обладает этим свойством, дает в результате подстановки (1) интеграл первоначального уравнения. О решении уравнения (2) см. 3.19.

Пример 1.

$$(x+1)\,yp+(y^2-x)\,q=0. \tag{3}$$

Здесь $x_1=x$, $x_2=y$, $A_0=x_2$, $A_1=-x_2$, $A_2=x_1$, и уравнение (2) имеет вид

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}=0.$$

Его интегральный базис: $\xi_0+\xi_1$, $\xi_1^2+\xi_2^2$; интегралами являются все функции $\zeta=\Omega\left(\xi_0+\xi_1,\ \xi_1^2+\xi_2^2\right)$.

Теперь нужно так выбрать функцию Ω, чтобы из ζ подстановкой (1) получилась функция только от x_1, x_2; это выполнено для $\Omega(u, v)=\dfrac{u^2}{v}$. Окончательно получаем;

$$\zeta=\frac{(\xi_0+\xi_1)^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}, \qquad \text{т. е.} \qquad z=\frac{(x+1)^2}{x^2+y^2}.$$

Пример 2.

$$x\,(y+1)\,p+(y^2-x)\,q=yz.$$

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 4.2 (a)) однородное уравнение, если вместо x, y, z писать x_1, x_2, x_3, имеет вид

$$x_1\left(x_2+1\right)p+\left(x_2^2-x_1\right)p_2+x_2x_3p_3=0; \tag{4}$$

это уравнение типа 4.9 с $A_0=x_2$, $A_1=-x_1$, $A_2=x_1$, $A_3=0$. Уравнение (2) здесь имеет вид

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}+0\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_3}=0.$$

Из его характеристических уравнений получаем интегральный базис

$$\zeta_1=\xi_3,\quad \zeta_2=\xi_1+\xi_2,\quad \zeta_3=\xi_0-\xi_1+(\xi_1+\xi_2)\ln|\xi_1|.$$

Каждая непрерывно дифференцируемая функция $\zeta=\Omega(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ есть снова интеграл.

Теперь надо найти такую функцию Ω, чтобы при подстановке (1) получилась функция только от x_1, x_2, x_3; это выполнено, например, в случае, если

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=\frac{\xi_3}{\xi_1+\xi_2}=\frac{x_3}{x_1+x_2}.$$

В случае

$$-\frac{\zeta_3}{\zeta_2}=\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi_1+\xi_2}-\ln|\xi_1|$$

это не достигается из-за логарифмического члена. Но если добавить сюда еще $\ln|\zeta_2|$, то получится интеграл

$$\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi_1+\xi_2}+\ln\left|\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_1}\right|=\frac{x_1-1}{x_1+x_2}+\ln\left|\frac{x_1+x_2}{x_1}\right|.$$

Окончательно, для уравнения (4) имеем базис

$$\frac{z}{x+y},\quad \frac{x-1}{x+y}+\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|,$$

а для исходного неоднородного уравнения — интегралы

$$z=(x+y)\,\Omega\left(\frac{x-1}{x+y}+\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|\right).$$

4.10. $\sum_{\nu=1}^{m-1}(A_0x_\nu-A_\nu)\,p_\nu=A_0z-A_m,\qquad A_\nu=a_{\nu0}+\sum_{\varkappa=1}^{m-1}a_{\nu\varkappa}x_\varkappa+a_{\nu n}z.$

Согласно ч. I, п. 4.2, это неоднородное линейное уравнение можно преобразовать в однородное уравнение 4.9.

4.11. $\sum_{\nu=1}^{m}(A_\nu-A_0x_\nu)\frac{\partial z}{\partial x_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(y_1,\ldots,y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}=0,$

$$A_\nu=a_{\nu0}+\sum_{k=1}^{m}a_{\nu k}x_k.$$

Методом Хессе (см. 4.9) здесь также можно добиться, чтобы первые коэффициенты стали линейными. Если положить

$$z(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=\zeta(\xi_0,\ldots,\xi_m,y_1,\ldots,y_n),$$

где

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_0},\ \ldots,\ x_m=\frac{\xi_m}{\xi_0},$$

то из данного уравнения получится

$$\sum_{\nu=0}^{m}A_\nu^*\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(y_1,\ldots,y_n)\frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu}=0,$$

где

$$A_\nu^*=\sum_{\varkappa=0}^{m}a_{\nu\varkappa}\xi_\varkappa.$$

Если, в частности, $n=1$, $f_1=1$, то в характеристических уравнениях может быть выбрано в качестве независимого переменного $y=y_1$; тогда характеристические уравнения образуют линейную систему

$$\xi_\nu'(y)=A_\nu^*,\quad \nu=1,\ldots,m.$$

R. H. J. Germay, *Annales Bruxelles* 59 (1939), стр. 139—144, распространил изложенный метод на случай, когда $a_{\nu\varkappa}$ является функциями x_ρ.

4.12. $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)} p_\nu = 0,\ f(t) = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t^\nu,\ F(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - x_k).$

При преобразовании

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_\nu = \frac{1}{x_\nu}$$

данное уравнение переходит в такое же уравнение с ξ_ν, ζ вместо x_ν, z и с $f^*(t) = a_0 t^{2n} + \ldots + a_{2n}$. Если для первоначального уравнения найден какой-нибудь интеграл, то второй интеграл получают, заменяя x_ν на $\frac{1}{x_\nu}$ и $a_0, \ldots, a_{2n}$ на $a_{2n}, \ldots, a_0$.

Интегралами служат функции

$$z = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)}\right)^2 - a_{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2 - a_{2n-1}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu;$$

$$z = \sqrt{F(\alpha) F(\beta)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(x_\nu - \alpha)(x_\nu - \beta) F'(x_\nu)},$$

если α, β — два корня $f(x)$;

$$z = F(c)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(c - x_\nu) F'(x_\nu)}\right)^2 - \frac{f(c)}{F(c)} - a_{2n} F(c)$$

для любого c.

ГЛАВА V

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1—2. Две независимые переменные

5.1. $yp = xq, \; xp + yq = z.$

Разрешая эти уравнения относительно p, q, получим

$$\frac{p}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{q}{z} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

следовательно,

$$z = c\sqrt{x^2 + y^2}.$$

5.2. $[x(x-a) - z - c]\,p + y(x-a)\,q = (x-2a)\,z - cx,$
$x(y-b)\,p + [y(y-b) - z - c]\,q = (y-2b)\,z - cy.$

Эту систему можно записать еще и в другом виде:

$$\left.\begin{aligned} (x-a)(xp + yq - 2z) &= (z+c)(p-x), \\ (y-b)(xp + yq - 2z) &= (z+c)(q-y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$(z+c)\,[(y-b)(p-x) - (x-a)(q-y)] = 0.$$

Поскольку $z = -c$ при $c \neq 0$ не является решением системы, то должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т. е.

$$(y-b)\,p - (x-a)\,q = ay - bx.$$

Исходная система может быть заменена этим и первым уравнением (1).

Теперь переходим к соответствующим (в смысле ч. I, п. 7.2) однородным уравнениям:

$$(y-b)\,w_x - (x-a)\,w_y + (ay - bx)\,w_z = 0, \qquad (2)$$

$$[x(x-a) - z - c]\,w_x + y(x-a)\,w_y + {} \\ + [(x-2a)\,z - cx]\,w_z = 0. \qquad (3)$$

Для уравнения (2) из характеристических уравнений получается интегральный базис:

$$(x-a)^2+(y-b)^2, \quad z-ax-ay.$$

Если мы, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), сделаем замену

$$w(x,\ y,\ z)=\zeta(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3), \quad \xi_1=(x-a)^2+(y-b)^2,$$
$$\xi_2=z-ax-by, \quad \xi_3=z,$$

то уравнение (2) перейдет в уравнение $\zeta_{\xi_3}=0$. Эта же замена превращает уравнение (3) в уравнение 2.4:

$$2(\xi_1-\xi_2-a^2-b^2-c)\zeta_{\xi_1}+(\xi_2-c)\zeta_{\xi_2}=0,$$

для которого легко находится интегральный базис:

$$\frac{\xi_1-2\xi_2-a^2-b^2}{(\xi_2-c)^2}.$$

Таким образом, решение исходной системы получим, разрешая относительно z соотношение

$$C_1(z-ax-by-c)^2=C_2(2z-x^2-y^2).$$

3—9. Три независимые переменные

5.3. $p_1-p_2=z,\ p_1-p_3=z$; см. ч. I, п. 6.4.

5.4. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0,\ x_2p_1-x_1p_2-x_3p_3=0.$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ составляют интегральный базис. Если, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), мы сделаем замену

$$z(x_1,\ x_2,\ x_3)=\zeta(y_1,\ y_2,\ y_3), \quad y_1=\frac{x_1}{x_3}, \quad y_2=\frac{x_2}{x_3}, \quad y_3=x_3,$$

то получим уравнение

$$(y_2+y_1)\zeta_{y_1}+(y_2-y_1)\zeta_{y_2}=0$$

с интегралом

$$\zeta=\operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1}+\ln\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Поэтому интегральным базисом данной системы будет:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}.$$

5.5. $3x_1p_1 + 4x_2p_2 + 5x_3p_3 = 0, \quad x_1p_2 + 2x_2p_3 = 0.$

Это полная система. Для первого уравнения функции

$$x_2x_1^{-\frac{4}{3}}, \quad x_3x_1^{-\frac{5}{3}}$$

составляют интегральный базис. Отсюда для самой системы методом ч. I, п. 6.7 (б) получаем интегральный базис:

$$(x_1x_3 - x_2^2)\, x_1^{-\frac{8}{3}}.$$

5.6. $(x_2 - x_3)\, p_1 + (x_3 - x_1)\, p_2 + (x_1 - x_2)\, p_3 = 0,$

$$x_2x_3p_1 + x_3x_1p_2 + x_1x_2p_3 = 0.$$

При образовании скобок возникает еще одно уравнение:

$$(x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)\, p_1 + (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - 2x_3)\, p_2 + \\ + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)\, p_3 = 0.$$

Детерминант всех трех уравнений равен

$$3(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

и ни в какой области не равен нулю тождественно; поэтому $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 0$, и, следовательно, данные уравнения имеют лишь тривиальное решение $z = \text{const}$.

5.7. $(x_1 - x_2)\, p_1 - 2(x_1 - x_2)\, p_2 + 3(x_1 + x_2 + 2x_3)\, p_3 = 0,$

$$(x_2 + x_3)\, p_1 + 2(2x_1 - 3x_2 - x_3)\, p_2 - 3(2x_1 + x_2 + 3x_3)\, p_3 = 0.$$

Это полная система. Для первого уравнения функции

$$2x_1 + x_2, \quad \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{(x_1 - x_2)^2}$$

составляют интегральный базис. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), т. е. подставить во второе уравнение

$$z(x_1, x_2, x_3) = \zeta(y_1, y_2), \quad y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{(x_1 - x_2)^2},$$

то получается уравнение

$$2\zeta_{y_1} - y_2^2\zeta_{y_2} = 0,$$

откуда

$$\zeta = y_1 - \frac{2}{y_2}.$$

Следовательно, для данной системы интегральный базис получаем в виде

$$z = \frac{3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3}{x_1 + 2x_2 + 3x_3}.$$

5.8. $x_1(x_1+x_2)p_1+(x_2x_3+x_2^2-x_1^2)p_3+2(x_1+x_2)=0,$
$$x_2(x_1+x_2)p_2+(x_1x_3+x_1^2-x_2^2)p_3+2(x_1+x_2)=0.$$

Это полная система. Каждое из соответствующих (в смысле ч. I, п. 6.8) однородных уравнений можно легко решить. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), то для однородной системы получается базис
$$\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)}{x_1x_2}.$$

Если исходную систему редуцировать с помощью преобразования ч. I, п. 6.8:
$$z(x_1,\ x_2,\ x_3)=\zeta(y_1,\ y_2,\ y_3),$$
$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2,\quad y_3=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)}{x_1x_2},$$
то получается система
$$y_1\zeta_{y_1}+2=0,\quad y_2\zeta_{y_2}+2=0,$$
откуда $\zeta=-\ln(y_1^2y_2^2)$. Таким образом, решения заданной системы представляются в виде
$$z=-\ln(x_1^2x_2^2)+\text{решения однородной системы.}$$

5.9. $x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3+z=0,\ x_2p_1-x_1p_2+zp_3+x_3=0.$

Соответствующая (в смысле ч. I, п. 7.2) однородная система для функции $w(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, где $x_4=z$, является полной: $x_1w_{x_1}+x_2w_{x_2}-x_3w_{x_3}-x_4w_{x_4}=0,\quad x_2w_{x_1}-x_1w_{x_2}+x_4w_{x_3}-x_3w_{x_4}=0$. Это с точностью до обозначений — система 5.12. Для нее интегральным базисом служат функции
$$x_1x_3+x_2x_4,\qquad -x_2x_3+x_1x_4.$$

Решения исходной системы получают, разрешая относительно z уравнение
$$\Omega(x_1z-x_2x_3,\ x_2z+x_1x_3)=0.$$

10—17. Четыре независимые переменные и два уравнения

5.10. $p_1+p_2-2p_3=0,\ x_1p_1+x_2p_2-(x_1+x_2)p_3+x_4p_4=0$; см. ч. I, п. 6.7 (а).

5.11. $x_1p_1+x_2p_2=0,\ p_1+p_2+x_1(p_3+p_4)=0.$

При образовании скобок возникает уравнение
$$p_1+p_2-x_1(p_3+p_4)=0.$$

Комбинированием всех трех уравнений получаем:

$$p_1+p_2=0, \quad x_1p_1+x_2p_2=0,$$

и кроме, для $x_1\neq 0$

$$p_3+p_4=0.$$

Из двух первых полученных уравнений следует $p_1=p_2=0$ для $x_1\neq x_2$, т. е. искомое решение не зависит от x_1, x_2. Третье полученное уравнение можно легко решить. Окончательно, в качестве решения исходной системы получаем:

$$z=\Omega(x_3-x_4).$$

5.12. $x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4=0,\ x_3p_1+x_4p_2-x_1p_3-x_2p_4=0.$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 составляют интегральный базис. Если, следуя методу ч. I, 6.7 (б), сделать замену

$$z(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\zeta(y_1,\ \ldots,\ y_4), \quad y_1=x_1x_2, \quad y_2=x_2x_3,$$
$$y_3=x_3x_4, \quad y_4=x_4,$$

то первое уравнение примет вид $\zeta_{y_4}=0$, а второе —

$$(y_2^2+y_1y_3)(\zeta_{y_1}-\zeta_{y_3})+y_2(y_3-y_1)\zeta_{y_2}=0.$$

Это последнее имеет интегральный базис

$$y_1+y_3, \quad \frac{y_1y_3}{y_2}-y_2.$$

Следовательно, исходная система имеет в качестве интегрального базиса следующие функции:

$$x_1x_2+x_4x_3, \quad x_1x_4-x_2x_3.$$

5.13. $-x_1p_1+x_2p_2+x_4p_3+x_3p_4=0,\ 2(x_3+x_4)p_2+x_2(p_3+p_4)=0.$

Это инволюционная система. Для второго уравнения легко находится интегральный базис: x_1, x_3-x_4, $x_2^2-4x_3x_4$. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), т. е. подставить в первое уравнение

$$z(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\zeta(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), \quad y_1=x_1, \quad y_2=x_3-x_4,$$
$$y_3=x_2^2-4x_3x_4, \quad y_4=x_4,$$

то получается уравнение

$$y_1\zeta_{y_1}+y_2\zeta_{y_2}+(4y_2^2-2y_3)\zeta_{y_3}=0$$

с базисом $\frac{y_2}{y_1}$, $y_1^2(y_3-y_2^2)$. При этом для первоначальной системы получается интегральный базис:

$$\frac{x_3-x_4}{x_1},\quad x_1^2\left[x_2^2-(x_3+x_4)^2\right].$$

5.14. $x_3p_1+x_4p_2-x_1p_3-x_2p_4=0,\quad x_4p_1+x_3p_2-x_2p_3-x_1p_4=0.$

Это инволюционная система. Базисом являются функции

$$x_1x_2+x_3x_4,\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

5.15. $(x_1x_4+x_2x_3)\,p_1+(x_3x_4-x_1x_2)\,p_3-(x_2^2+x_4^2)\,p_4=0,$
$(x_1x_4+x_2x_3)\,p_2-(x_1^2+x_3^2)\,p_3+(x_3x_4-x_1x_2)\,p_4=0.$

Если умножить первое уравнение на x_1, второе — на $-x_2$ и затем сложить оба уравнения, то, с точностью до множителя $x_1x_4+x_2x_3$, получается первое из уравнений 5.12. Аналогично из данной системы получается и второе уравнение 5.12. Следовательно, написанная выше система может быть заменена системой 5.12.

5.16. $(x_4^2-x_3^2)\,p_1+(x_1x_3-x_2x_4)\,p_3+(x_2x_3-x_1x_4)\,p_4=0,$
$(x_4^2-x_3^2)\,p_2+(x_2x_3-x_1x_4)\,p_3+(x_1x_3-x_2x_4)\,p_4=0.$

При $x_4^2-x_3^2\neq 0$ эта система эквивалентна системе 5.14.

5.17. $p_1+(x_2+x_4-3x_1)\,p_3+(x_1x_2+x_1x_4+x_3)\,p_4=0,$
$p_2+(x_3x_4-x_2)\,p_3+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)\,p_4=0.$

Образование скобок после отбрасывания лишнего множителя приводит к уравнению

$$p_3+x_1p_4=0.$$

Тем самым данные уравнения можно упростить:

$$p_2+x_2p_4=0,\qquad p_1+(3x_1^2+x_3)\,p_4=0.$$

Эти три выписанные уравнения образуют систему 5.18.

18 — 23. Четыре независимые переменные и три уравнения

5.18. $p_1+(3x_1^2+x_3)\,p_4=0,\ p_2+x_2p_4=0,\ p_3+x_1p_4=0.$

Это инволюционная система. Применяя преобразования Майера

$$x_1=uu_1,\qquad x_2=uu_2,\qquad x_3=uu_3,$$

приходим к линейному дифференциальному уравнению для функции $z(x_1, \ldots, x_4) = Z(u, u_1, \ldots, u_4)$:

$$Z_u + \left(3u^2u_1^3 + 2uu_1u_3 + uu_2^2\right) Z_{x_4} = 0.$$

Интегралами этого уравнения являются функции

$$\Omega\left(u^3u_1^3 + u^2u_1u_3 + \frac{1}{2}u^2u_2^2 - x_4\right),$$

поэтому исходная система имеет интегралы

$$\Omega\left(x_1^3 + x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_4\right).$$

5.19. $\boldsymbol{x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0,\ x_3p_1 - x_1p_3 = 0,\ x_4p_2 - x_2p_4 = 0.}$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 составляют базис. Если, следуя ч. I, п. 6.7 (б), сделать замену

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4), \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1x_2,$$
$$y_3 = x_2x_3 \quad y_4 = x_3x_4,$$

то первое уравнение переходит в $\zeta_{y_1} = 0$, а два других — соответственно в

$$y_3^2\zeta_{y_2} - y_2y_3\zeta_{y_3} - y_2y_4\zeta_{y_4} = 0, \quad y_2y_4\zeta_{y_2} + y_3y_4\zeta_{y_3} - y_3^2\zeta_{y_4} = 0.$$

Для первого из этих двух уравнений имеем базис $y_2^2 + y_3^2$, $\dfrac{y_3}{y_4}$. Если еще раз применить то же преобразование, то для исходной системы получается, наконец, интегральный базис:

$$\left(x_1^2 + x_3^2\right)\left(x_2^2 + x_4^2\right).$$

5.20. $\boldsymbol{2x_1p_1 + 3x_2p_2 + 4x_3p_3 + 5x_4p_4 = 0, \quad p_1 + 4x_1p_3 + 5x_2p_4 = 0,}$
$\boldsymbol{x_2p_3 + \left(2x_3 - 4x_1^2\right)p_4 = 0.}$

Это полная система. Для второго уравнения находится интегральный базис (дальше он обозначен через y_2, y_3, y_4). Если, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), ввести

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4),$$
$$y_1 = x_1, \ y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - 2x_1^2, \quad y_4 = x_4 - 5x_1x_2,$$

то из второго уравнения системы получается $\zeta_{y_1} = 0$, а из двух других

$$3y_2\zeta_{y_2} + 4y_3\zeta_{y_3} + 5y_4\zeta_{y_4} = 0, \quad y_2\zeta_{y_3} + 2y_3\zeta_{y_2} = 0,$$

т. е. мы приходим к системе 5.5 с ζ, y_ν вместо z, $x_{\nu-1}$.

5.21. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=0,\ x_2p_2+2x_3p_3+3x_4p_4=0,$
$$3x_1^2p_2+10x_1x_2p_3+(15x_1x_3+10x_2^2)\,p_4=0.$$

Система полная. Для первого уравнения функции x_2/x_1, x_3/x_1, x_4/x_1 составляют интегральный базис. Если положить (согласно ч. I, п. 6.7 (б))
$$z(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\zeta(y_1,\ \ldots,\ y_4),$$
$$y_1=x_1,\quad y_2=\frac{x_2}{x_1},\quad y_3=\frac{x_3}{x_1},\quad y_4=\frac{x_4}{x_1},$$
то первое уравнение системы перейдет в $\zeta_{y_1}=0$, а два других—в
$$y_2\zeta_{y_2}+2y_3\zeta_{y_3}+3y_4\zeta_{y_4}=0,\ 3\zeta_{y_2}+10y_2\zeta_{y_3}+(15y_3+10y_2^2)\zeta_{y_4}=0. \quad (1)$$
Для последнего из полученных уравнений (1) функции $3y_3-5y_2^2$, $9y_4-45y_2y_3+40y_2^3$ составляют интегральный базис. Применим еще раз преобразование ч. I, п. 6.7 (б), именно, положим:
$$\zeta=u(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4),\ s_1=y_1,\quad s_2=y_2,\quad s_3=3y_3-5y_2^2,$$
$$s_4=9y_4-45y_2y_3+40y_2^3.$$

Тогда из последнего уравнения (1) получается $u_{s_2}=0$, а из предпоследнего — уравнение
$$2s_3u_{s_3}+3s_4u_{s_4}=0$$
с интегралом s_4^2/s_3^3. При этом для исходной системы получается базис
$$\frac{(9x_1^2x_4-45x_1x_2x_3+40x_2^3)^2}{(3x_1x_3-5x_2^2)^3}.$$

5.22. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4=x_3^2,\ 2x_2p_2-x_4p_4=1,$
$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4=x_1x_3.$$ См. 5.23.

5.23. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2z,\ 2x_2p_2-x_4p_4=z,$
$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4=x_1x_3z$$

Система полная. Заменой $u(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\ln|z|$ она переводится в систему 5.22 с неизвестной u вместо z. Для решения системы в каждом из обоих видов после того, как она разрешена относительно производных, имеется метод Майера ч. I, п. 6.4 редукции к одному дифференциальному уравнению.

Систему можно решать также методом первых интегралов Якоби.

Если данная система переведена (согласно ч. I, п. 7.2) в однородную систему, то получается система 5.30 с z, w_z

вместо x_5, p_5; решения первоначальной системы получаются из уравнения $w(x_1, \ldots, x_4, z) = 0$ разрешением относительно z:

$$z = x_2 x_4 \Omega\left(x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2\right).$$

24—29. Пять независимых переменных и два уравнения

5.24. $x_1^2 p_1 - 2x_5 p_2 + \left(x_1^2 x_4 - 2x_5\right) p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0,\ 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$x_1 p_2 + x_1 (1 - x_5)\, p_3 + 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0,$$

здесь опущен множитель $2x_1$. Это уравнение, в силу второго данного уравнения, можно заменить на $p_2 + (1 - x_5)\, p_3 = 0$, и, таким образом, всю систему можно заменить на

$$x_1^2 p_1 + \left(x_1^2 x_4 - 2x_5^2\right) p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0,$$
$$2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0, \qquad p_2 + (1 - x_5) p_3 = 0.$$

Теперь образование скобок приводит только к одному существенно новому уравнению, а именно, к $p_3 = 0$. Следовательно, должно быть также $p_2 = 0$, и остаются уравнения

$$x_1 p_1 - 2x_4 p_4 = 0, \qquad 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0,$$

которые образуют инволюционную систему и имеют базис $x_1^2 x_4 - x_5^2$.

5.25. $\left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_5 + x_2\right] p_1 - \left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_4 + x_1\right] p_2 +$
$+ \left(x_2 x_4 - x_1 x_5\right) p_3 = 0,\ x_2 p_4 - x_1 p_5 = 0.$

Образованием скобок получаем:

$$\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right)\left(x_1 p_1 + x_2 p_2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2\right) p_3 -$$
$$- \left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_4 + x_1\right] p_4 - \left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_5 + x_2\right] p_5 = 0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения можно обычным методом найти базис:

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 - x_3, \quad \left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right)^2 + x_1^2 + x_2^2.$$

Он, как легко проверить, является одновременно интегральным базисом для всей системы.

5.26. $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) p_3 = 0,$
$\left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_4 + x_1\right] p_4 + \left[\left(x_1 x_4 + x_2 x_5\right) x_5 + x_2\right] p_5 = 0.$

После образования скобок, если принять во внимание второе уравнение, получается $p_3 = 0$. Легко проверить, что $p_3 = 0$,

$x_1p_1+x_2p_2=0$, и второе из данных уравнений образует полную систему, уравнения которой можно решать порознь. Базисом для данной системы служат функции

$$\frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{(x_2x_4-x_1x_5)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

5.27. $\left[\left(x_1x_5-x_2x_4\right)x_5+x_3x_4+x_1\right]p_1+\left[\left(x_2x_4-x_1x_5\right)x_4+x_3x_5+x_2\right]p_2+$ $+\left[\left(x_4^2+x_5^2\right)x_3+x_1x_4+x_2x_5\right]p_3=0,\ \left(x_3x_4+x_1\right)p_4+\left(x_3x_5+x_2\right)p_5=0.$

Образование скобок и прибавление первого уравнения, умноженного на $2x_3$, ко второму, умноженному на $-\left(x_4^2+x_5^2+1\right)$, дает:

$$[(x_2x_4-x_1x_5)x_2+(x_3x_4+x_1)x_3]p_1+\left[(x_1x_5-x_2x_4)x_1+\right.$$
$$\left.+\left(x_3x_5+x_2\right)x_3\right]p_2-\left[\left(x_1x_4+x_2x_5\right)x_3+x_1^2+x_2^2\right]p_3=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная, следовательно, базис состоит из двух функций. Для второго уравнения легко находится интеграл

$$\frac{x_3x_4+x_1}{x_3x_5+x_2}.$$

Он удовлетворяет первому уравнению, а следовательно, и третьему. Если теперь применить метод редукции ч. I, п. 6.7 (а), то находится еще один интеграл:

$$\frac{x_1x_5-x_2x_4}{x_3x_5+x_2}.$$

Эти две выписанные функции составляют интегральный базис.

5.28. $\left(x_3x_5+x_2\right)p_1-\left(x_3x_4+x_1\right)p_2+\left(x_2x_4-x_1x_5\right)p_3=0,$ $\left[x_4\left(x_2x_4-x_1x_5\right)+x_3x_5+x_2\right]p_4-\left[x_5\left(x_1x_5-x_2x_4\right)+x_3x_4+x_1\right]p_5=0.$

Образование скобок и вычитание первого уравнения, умноженного на $(x_1x_5-x_2x_4)$, дает:

$$(x_3x_4+x_1)x_3p_1+(x_3p_5+x_2)x_3p_2+(x_2x_4-x_1x_5)(x_2p_1-x_1p_2)-$$
$$-\left[x_1^2+x_2^2+\left(x_1x_4+x_2x_5\right)x_3\right]p_3-\left(x_4^2+x_5^2+1\right)\times$$
$$\times[(x_3x_4+x_1)p_4+(x_3x_5+x_2)p_5]=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения легко находятся решения

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2, \quad x_1x_4+x_2x_5-x_3,$$

для второго — решение

$$\frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

Это последнее удовлетворяет также первому уравнению. Поэтому исходная система имеет базис

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2, \quad \frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

5.29. $x_2p_1-x_1p_2+2x_4p_3+(x_5-x_3)p_4-2x_4p_5=0, \quad x_1x_2p_1+(x_2^2+1)p_2+(2x_1x_4+x_2x_3)p_3+(2x_2x_4+x_1x_5)p_4+3x_2x_5p_5=0.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$(x_1^2+1)p_1+x_2x_1p_2+3x_1x_3p_3+(2x_1x_4+x_2x_3)p_4+(2x_2x_4+x_1x_5)p_5=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения функции

$$x_1^2+x_2^2, \quad x_3+x_5, \quad x_3x_5-x_4^2, \quad x_1^2x_3+2x_1x_2x_4+x_2^2x_5$$

составляют интегральный базис. Если применить преобразование ч. I, п. 6.7 (б) и положить

$$z(x_1, \ldots, x_5)=\zeta(y_1, \ldots, y_5),$$
$$y_1=x_1, \quad y_2=x_1^2+x_2^2, \quad y_3=x_3+x_5, \quad y_4=x_3x_5-x_2^2,$$
$$y_5=x_1^2x_3+2x_1x_2x_4+x_2^2x_5,$$

то из трех уравнений получаются: $\zeta_{y_1}=0$,

$$2x_2(y_2+1)\zeta_{y_2}+[2(x_1x_4+x_2x_5)+x_2y_3]\zeta_{y_3}+4x_2y_4\zeta_{y_4}+[2(x_1x_4+x_2x_5)(y_2+1)+3x_2y_5]\zeta_{y_5}=0, \quad (1)$$

$$2x_1(y_2+1)\zeta_{y_2}+[2(x_1x_3+x_2x_4)+x_1y_3]\zeta_{y_3}+4x_1y_4\zeta_{y_4}+[2(x_1x_3+x_2x_4)(y_2+1)+3x_1y_5]\zeta_{y_5}=0. \quad (2)$$

Умножим сначала уравнение (1) на x_1, уравнение (2) на $-x_2$, и сложим результаты. Далее, умножим уравнение (1) на x_2, уравнение (2) на x_1 и опять сложим. Окончательно получим:

$$\zeta_{y_3}+(y_2+1)\zeta_{y_5}=0, \quad (3)$$

и если из второго уравнения мы вычтем уравнение (3), умноженное на $2y_5$, то придем к уравнению

$$2(y_2+1)\zeta_{y_2}+y_3\zeta_{y_3}+4y_4\zeta_{y_4}+3y_5\zeta_{y_5}=0. \quad (4)$$

Для него получается базис

$$\frac{y_3^2}{y_2+1}, \quad \frac{y_4}{(y_2+1)^2}, \quad \frac{y_5^2}{(y_2+1)^3},$$

а отсюда, с помощью преобразования ч. I, п. 6.7 (б) для системы уравнений (3), (4), — базис

$$\frac{y_4}{(y_2+1)^2}, \quad \frac{y_3(y_2+1)-y_5}{\sqrt{(y_2+1)^3}}.$$

Следовательно, функции

$$\frac{x_3x_5-x_4^2}{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^2}, \quad \frac{\left(x_1^2+1\right)x_5+\left(x_2^2+1\right)x_3-2x_1x_2x_4}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^3}}$$

являются базисом данной системы.

30—32. Пять независимых переменных и три или четыре уравнения

5.30. $2x_1p_1-x_3p_3=0,\ 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$

$$2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0.$$

Система полная. Для подсистемы, состоящей из двух первых уравнений, с помощью характеристических уравнений получают базис $x_1x_3^2$, $x_2x_4^2$, x_4x_5. Если подставить теперь

$$z=\zeta(y_1,\ y_2,\ y_3),\quad y_1=x_1x_3^2,\quad y_2=x_2x_4^2,\quad y_3=x_4x_5$$

в третье уравнение, то получится уравнение

$$y_2(\zeta_{y_1}+\zeta_{y_2})+y_3\zeta_{y_3}=0$$

с базисом y_1-y_2, y_3/y_2. Поэтому исходная система имеет базис $x_1x_3^2-x_2x_4^2$, $\dfrac{x_5}{x_2x_4}$.

5.31. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0,\ 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$

$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0.$$

Система полная. Линейной комбинацией первого и третьего уравнений можно привести систему к виду 5.30.

5.32. $p_1+2x_1p_2+3x_2p_3+4x_3p_4+5x_4p_5=0,$

$$x_1p_1+2x_2p_2+3x_3p_3+4x_4p_4+5x_5p_5=0,$$

$$x_1p_2+3x_1^2p_3+(7x_1x_2-x_3)p_4+\left(8x_1x_3-2x_4+4x_2^2\right)p_5=0,$$

$$p_2+3x_1p_3+\left(4x_2+2x_1^3\right)p_4+5(x_3+x_1x_2)p_5=0.$$

Система полная. Для первого уравнения можно легко найти базис $y_2, \ldots, y_5$. Далее, можно применить метод ч. I, п. 6.7 (б). Именно, если положить

$$z(x_1,\ \ldots,\ x_5)=\zeta(y_1,\ \ldots,\ y_5),\quad y_1=x_1,\quad y_2=x_2-x_1^2,$$

$$y_3=x_3-3x_1x_2+2x_1^3,\quad y_4=x_4-4x_1x_3+6x_1^2x_2-3x_1^4,$$

$$y_5=x_5-5x_1x_4+10x_1^2x_3-10x_1^3x_2+4x_1^5,$$

то первое уравнение примет вид $\zeta_{y_1}=0$. После упрощения остальные уравнения приводятся к виду

$$2y_2\zeta_{y_2}+3y_3\zeta_{y_3}+4y_4\zeta_{y_4}+5y_5\zeta_{y_5}=0,$$
$$\zeta_{y_2}+4y_2\zeta_{y_4}+5y_3\zeta_{y_5}=0, \quad y_3\zeta_{y_4}+(2y_4-4y_2^2)\zeta_{y_5}=0.$$

Таким образом, получается система 5.20.

33—36. Прочие системы

5.33. $(x_1-x_6)p_1+(x_5-x_1)p_2+(x_6-x_5)p_5=0, \quad (x_2-x_6)p_1+(x_5-x_2)p_2+(x_6-x_5)p_6=0, \ (x_3-x_6)p_1+(x_5-x_3)p_2+(x_6-x_5)p_4=0, \ (x_4-x_6)p_1+(x_5-x_4)p_2+(x_6-x_5)p_3=0.$

Система полная; ее базис:

$x_1+\ldots+x_6, \ x_1x_5+x_2x_6+x_3x_4.$

5.34.
$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=0,$$
$$x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4+4x_4p_5+5x_5p_6=0,$$
$$x_2p_2+2x_3p_3+3x_4p_4+4x_5p_5+5x_6p_6=0,$$
$$x_1x_2p_3+3x_2^2p_4+(7x_2x_3-x_1x_4)p_5+(8x_2x_4-2x_1x_5+4x_3^2)p_6=0.$$

Скобки второго и четвертого уравнений приводят к существенно новому уравнению, а именно, к уравнению

$$x_1^2p_3+3x_1x_2p_4+(4x_1x_3+2x_2^2)p_5+(5x_1x_4+5x_2x_3)p_6=0.$$

Система, состоящая из этих пяти уравнений, полная Можно решить ее повторным применением метода ч. I, п. 6.7 (б). Для первого уравнения функции $\frac{x_\nu}{x_1}$, $\nu=2, \ldots, 6$, составляют базис Далее, если положить

$$z(x_1, \ldots, x_6)=\zeta(y_1, \ldots, y_6),$$
$$y_\nu=\frac{x_\nu}{x_1} \ (\nu=2, \ldots, 6), \quad y_1=x_1,$$

то из данной системы получаем: $\zeta_{y_1}=0$ и

$$\zeta_{y_2}+2y_2\zeta_{y_3}+3y_3\zeta_{y_4}+4y_4\zeta_{y_5}+5y_5\zeta_{y_6}=0,$$
$$y_2\zeta_{y_2}+2y_3\zeta_{y_3}+3y_4\zeta_{y_4}+4y_5\zeta_{y_5}+5y_6\zeta_{y_6}=0,$$
$$y_2\zeta_{y_3}+3y_2^2\zeta_{y_4}+(7y_2y_3-y_4)\zeta_{y_5}+(8y_2y_4-2y_5+4y_3^2)\zeta_{y_6}=0,$$
$$\zeta_{y_3}+3y_2\zeta_{y_4}+(4y_3+2y_2^2)\zeta_{y_5}+(5y_4+5y_2y_3)\zeta_{y_6}=0,$$

т. е. систему 5.32.

5.35. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

Образование скобок приводит к системе 5.36.

5.36. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

Эта система полная. Для первого уравнения базисом служат функции $x_\nu - x_n$, $\nu = 1, \ldots, n-1$. Если, согласно ч. 1, п. 6.7 (б), положить:

$$z(x_1, \ldots, x_n) = u(y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad y_\nu = x_\nu - x_n,$$

то из второго уравнения данной системы получается уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu u_{y_\nu} = 0;$$

его базис: y_ν / y_{n-1}, $\nu = 1, \ldots, n-2$. Базисом двух первых уравнений будут функции

$$\frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-2.$$

Если теперь положить

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}), \quad \xi_\nu = \frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n},$$

то из третьего уравнения получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \xi_\nu (\xi_\nu - 1) \zeta_{\xi_\nu} = 0.$$

Для этого уравнения функции

$$\frac{\xi_\nu - 1}{\xi_\nu} \frac{\xi_{n-2}}{\xi_{n-2} - 1}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-3,$$

образуют базис.

Таким образом, для данной системы базис образуют ангармонические отношения

$$\frac{x_\nu - x_{n-1}}{x_\nu - x_n} : \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_n}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-3.$$

Если к данной системе присоединить еще одно уравнение $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3 p_\nu = 0$, то получившаяся система четырех уравнений будет иметь только тривиальный интеграл $z = \text{const}$. См. G. Pfeiffer, *Giornale Mat.* 69 (1931), стр. 232—236.

ГЛАВА VI

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—13. $ap^2 + \ldots$

6.1. $\boldsymbol{p^2 = aq + b}$; уравнение типа $F(p, q) = 0$.

$$z = Ax + \frac{A^2 - b}{a} y + B.$$

Относительно получения интегралов из этого полного интеграла см. ч. I, п. 9.5.

В случае $a = 1$, $b = 0$ через параболу $z = x^2$, $y = 0$ проходит интегральная поверхность

$$z = \frac{x^2}{1 - 4y}, \quad \text{где} \quad y < \frac{1}{4}.$$

6.2. $\boldsymbol{p^2 + q + z + x = 0}$; уравнение типа ч. I, п. 11.3 для функции $z + x$.

Если сделать подстановку

$$x + z(x, y) = \zeta(\xi), \quad \xi = x + 2Ay,$$

то получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta' = 1 - A \pm \sqrt{A^2 - 2A - \zeta};$$

отсюда для определения полного интеграла получаем уравнение

$$R + (A - 1) \ln |1 - A + R| + \frac{x}{2} + Ay = B,$$

где $R^2 = A^2 - 2A - z - x$.

6.3. $\boldsymbol{p^2 + aq = bx + cy}$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z = \pm \frac{2}{3b} (bx + A)^{3/2} + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A}{a} y + B, \quad \text{если} \quad b \neq 0,$$

$$z = Ax + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A^2}{a} y + B, \quad \text{если} \quad b = 0.$$

6.4. $p^2=axq+bxy$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\pm\frac{2x}{3}\sqrt{Ax}+\frac{2Ay-by^2}{2a}+B.$$

6.5. $p^2+xp=q$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{A^2}{4}y-\frac{x^2}{4}\pm\frac{x}{4}\sqrt{x^2+A^2}\pm\frac{A^2}{4}\operatorname{Arsh}\frac{x}{A}+B$$

и для $|x|>A>0$.

$$z=-\frac{A^2}{4}y-\frac{x^2}{4}\pm\frac{x}{4}\sqrt{x^2-A^2}\mp(\operatorname{sign}x)\frac{A^2}{4}\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{A}\right|+B,$$

причем значение $\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{a}\right|$ должно быть выбрано положительное.

6.6. $p^2+xp-yq+2z=0$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $p=2Ay^3$, отсюда следует: $z=2Axy^3+\varphi(y)$. Если подставить это соотношение в данное уравнение, то определяется φ и, таким образом,

$$z=2Axy^3+A^2y^6+By^2.$$

Полным интегралом является также

$$z=Ay^2-\left(x+\frac{B}{y}\right)^2.$$

6.7. $3p^2+xp+(y+2)q=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+3A^2+2B.$$

Интегралом также является

$$z=-\frac{x^2}{12}+B(y+2).$$

Особого интеграла здесь нет.

6.8. $p^2+ayp+bq=c$; уравнение типа ч. I, п. 11.4.

$$z=Ax+\frac{c-A^2}{b}y-\frac{aA}{2b}y^2+B.$$

6.9. $p^2+ay^2q+ayz+by^4=0$.

Полагая $u(x, y)=yz(x, y)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2=-ay^3u_y-by^6$$

и отсюда — полный интеграл

$$yz = -\frac{b}{4a}y^4 + Ax + \frac{A^2}{2ay^2} + B.$$

Полным интегралом будет также

$$yz = -\frac{b}{4a}y^4 - \frac{a}{2}y^2(x+A)^2 + B.$$

6.10. $p^2 + ay^2q = b$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ax + \frac{A^2-b}{ay} + B.$$

6.11. $p^2 - y^3q = x^2 - y^2$; уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл

$$z = \pm\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\varphi(x)\right) - \frac{A}{2y^2} + \ln|y| + B,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{A}} & \text{для} \quad A > 0, \\ \operatorname{sign} x \operatorname{Arch}\frac{|x|}{\sqrt{-A}} & \text{для} \quad A < 0 \text{ и } |x| > |A|, \\ 0 & \text{для} \quad A = 0; \end{cases}$$

при этом под $\operatorname{Arch} u$ надо понимать положительную ветвь.

6.12. $p^2 + azq = bz^2$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$$z = B\exp[(x+Ay)]R], \quad \text{где} \quad R = -\frac{aA}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2A^2+4b}.$$

Интегралом будет также функция

$$z = Ae^{\frac{b}{a}y}.$$

6.13. $p^2 + az(yq - z) = 0$.

Полагая

$$\ln|z(x, y)| = \zeta(x, \eta), \qquad \eta = \ln|y|,$$

из данного уравнения получаем уравнение типа ч. I, п. 11.2

$$\zeta_x^2 + a(\zeta_\eta - 1) = 0$$

с полным интегралом

$$\zeta = Ax + \left(1 - \frac{A^2}{a}\right)\eta + B.$$

14—20. $f(x, y, z)p^2 + \ldots$

6.14. $xp^2 = q$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = 2\sqrt{Ax} + Ay + B.$$

6.15. $x^2p^2-y^2q=z$; уравнение типа ч. I, п. 11.6.

Полагая $z=u(x)+v(y)$, получаем:

$$x^2u'^2-u=y^2v'+v.$$

Уравнение имеет решение, если левая и правая части равны нулю. Таким образом, находим полный интеграл

$$z=A\exp\frac{1}{y}+\frac{1}{4}(\ln x+B)^2.$$

6.16. $(xp+z)^2=q$.

Полагая $w(x, y)=xz$, получаем уравнение 6.14

$$xw_x^2=w_y;$$

следовательно,

$$z=2\sqrt{\frac{A}{x}}+\frac{Ay+B}{x}$$

— полный интеграл. Если в данное уравнение подставить

$$z=u(x)+v(y),$$

то получится уравнение

$$v'(y)=[xu'(x)+u(x)+v(y)]^2,$$

которое удовлетворяется при

$$xu'+u=0, \qquad v'=v^2.$$

Отсюда получаем полный интеграл

$$z=\frac{A}{x}-\frac{1}{y+B}.$$

6.17. $x^2p^2+ayzq=bz^2$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $\xi=\ln x$, $\eta=\ln y$, получаем уравнение 6.12

$$\zeta_\xi^2+a\zeta\zeta_\eta=b\zeta^2.$$

6.18. $x(x+1)p^2-2xzp-y^2q+z^2=0$.

Перегруппируем члены уравнения

$$(xp-z)^2+xp^2-y^2q=0;$$

следовательно, это уравнение типа ч. I, п. 11.17. С помощью преобразования Эйлера (см. ч. I, п. 11.15) из него получается квазилинейное уравнение

$$X^2Z_X+Y^2Z_Y=-Z^2,$$

решения которого получаются разрешением уравнения

$$\frac{1}{Z} = -\frac{1}{X} + \Omega\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right).$$

Отсюда для интеграла z первоначального уравнения получают параметрическое представление

$$z = xX - Z, \quad x = \frac{Z^2}{X^2}\left\{\Omega'\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{y}\right) - 1\right\},$$
$$\frac{1}{Z} = -\frac{1}{X} + \Omega\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{y}\right).$$

Для $\Omega(u) = (A+1)u + B$, в частности, получают полный интеграл

$$\left(\frac{A+1}{y} - B\right) z = \left(1 \pm \sqrt{|Ax|}\right)^2.$$

6.19. $y(y^2+1)(xp - z)^2 + x(p^2+1) = (y^2+1)q.$

Преобразованием Эйлера ч. I, п. 11.15 из этого уравнения получаем квазилинейное уравнение

$$(X^2+1)Z_X + (Y^2+1)Z_Y = -Y(Y^2+1)Z^2.$$

Из решений

$$\frac{2}{Z} = Y^2 + \Omega\left(\frac{X-Y}{1+XY}\right)$$

этого уравнения получаем решение первоначального уравнения в параметрическом представлении:

$$x = -\frac{Z^2(1+y^2)}{2(1+Xy)^2}\Omega'(u), \qquad z = xX - Z,$$

где

$$Z = \frac{2}{y^2 + \Omega(u)}, \qquad u = \frac{X-y}{1+Xy}.$$

6.20. $z^2p^2 + azq = bx + cy.$

Полагая $u(x, y) = z^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2 - 4bx = 4cy - 2au_y.$$

Из него находим полный интеграл

$$z^2 = \frac{1}{6b}(4bx + A)^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{a}y^2 - \frac{A}{2a}y + B.$$

21—33. $apq + \ldots$

6.21. $pq = a.$

Характеристики этого уравнения — прямые линии. Полный интеграл

$$z = aAx + \frac{y}{A} + B.$$

6.22. $pq=axy+b$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы p^2-ay^2, q^2-ax^2. Из $q^2-ax^2=A$ имеем:

$$z=y\sqrt{ax^2+A}+b\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+A}}+B.$$

В случае $b=0$ см. ч. I, п. 9.6, пример 2.

6.23. $pq=z^a$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полный интеграл

$$z=\left(\frac{2-a}{2A}(A^2x+y+B)\right)^{\frac{2}{2-a}},\quad \text{если}\quad a\neq 2;$$

$$z=B\exp\left(Ax+\frac{y}{A}\right),\quad \text{если}\quad a=2.$$

В случае $a=1$ см. также ч. I, пп. 9.2 (в), 9.3, 9.5 (в).

6.24. $pq=Ax^ay^bz^c$; однородное уравнение.

Полагая $z(x,\ y)=\zeta(\xi,\ \eta)$ и

$$\xi=\begin{cases}\dfrac{x^{a+1}}{a+1}, & \text{если } a\neq-1;\\ \ln x, & \text{если } a=-1;\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}\dfrac{y^{b+1}}{b+1}, & \text{если } b\neq-1;\\ \ln y, & \text{если } b=-1,\end{cases}$$

получаем $p=x^a\zeta_\xi$, $q=y^b\zeta_\eta$ и, таким образом (см. ч. I, п. 11.3),

$$\zeta_\xi\zeta_\eta=A\zeta^c.$$

Далее, если $c\neq 2$, это уравнение заменой $\zeta=u^{\frac{2}{2-c}}$ переводится в уравнение 6.21:

$$u_\xi u_\eta=A\left(1-\frac{c}{2}\right)^2.$$

Если $c=2$, то после замены $u=\ln\zeta$ получаем уравнение $u_\xi u_\eta=A$.

6.25. $pq+ap=bz$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x,\ y)=\zeta(\xi)$, $\xi=x+Ay$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2A\zeta'=-a\pm\sqrt{4Ab\zeta+a^2},$$

и отсюда — полный интеграл

$$b(x+Ay)+B=R+a\ln|R-a|,\quad \text{где}\quad R^2=4Abz+a^2.$$

6.26. $pq=ap+bq$; уравнение типа $F(p,\ q)=0$.

$$z=Ax+By+C,\quad \text{где}\quad AB=aA+bB.$$

6.27. $pq = xp + yq$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$\frac{q}{p},\ p^2 - 2yp,\ q^2 - 2xq,\ (p \pm q)^2 \pm 2(x \pm y)(p \pm q),$$

а отсюда — полные интегралы в различных формах

$$z = \frac{(x + Ay)^2}{2A} + B;\quad z = xy + x\sqrt{y^2 + A} + B;$$

$$z = xy + y\sqrt{x^2 + A} + B;$$

$$z = xy + \frac{1}{2}\int \sqrt{\xi^2 + A}\,d\xi + \frac{1}{2}\int \sqrt{\eta^2 + A}\,d\eta + B,$$

где

$$\xi = x + y,\quad \eta = x - y.$$

6.28. $pq + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = ax + by + ab,$$

особый интеграл $z = -xy$.

6.29. $pq + ayp + bxq = 0,\ ab \neq 0$.

(а) В данном уравнении можно разделить переменные. При этом подстановка

$$\frac{p + bx}{bx} = A,\qquad \frac{q + ay}{ay} = \frac{1}{A}$$

приводит к интегралу

$$z = \frac{A - 1}{2}\left(bx^2 - \frac{a}{A}y^2\right) + B.$$

(б) Если данное уравнение записать в виде

$$\frac{p}{x}\frac{q}{y} + a\frac{p}{x} + b\frac{q}{y} = 0,$$

то заменой

$$z(x,\ y) = \zeta(\xi,\ \eta),\quad \xi = x^2,\quad \eta = y^2$$

мы получим из него уравнение 6.26

$$2\zeta_\xi\zeta_\eta + a\zeta_\xi + b\zeta_\eta = 0.$$

Получается полный интеграл

$$z = A\left(x^2 - \frac{a}{b + 2A}y^2\right) + C,$$

т. е. тот же самый, что и в (а).

(в) Если $ab>0$, то можно так определить числа α, β, что $a=\pm\alpha^2$, $b=\pm\beta^2$, причем оба раза берутся верхние или оба раза нижние знаки. Если положить

$$z(x, y)=\zeta(\xi, \eta),\ \xi=\beta x+\alpha y,\ \eta=\beta x-\alpha y,$$

то получается уравнение 6.85.

$$\zeta_\xi^2\pm\xi\zeta_\xi=\zeta_\eta^2\pm\eta\zeta_\eta.$$

Таким образом приходим к другому полному интегралу.

6.30. $(p+a)(q+bz)=C$; уравнение типа ч. I, п. 11.13.

Можно также воспользоваться тем, что q/p — первый интеграл, а дальше действовать согласно ч. I, п. 9.3.

6.31. $p(q-\sin y)=\sin x$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=A\cos x-\cos y-\frac{y}{A}+B.$$

6.32. $2(pq+yp+xq)+x^2+y^2=0$.

Из характеристических уравнений получим первый интеграл $p+q+x+y$ и затем будем применять ч. I, п. 9.3. Если положить

$$\zeta(\xi, \eta)=z+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2},\quad \xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad \eta=\frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

то получается уравнение 6.74.

$$\zeta_\xi^2-\zeta_\eta^2=2\xi^2.$$

6.33. $p(kq+ax+by+cz)=1$, $c\neq 0$.

Полагая $u(x, y)=-\frac{bk}{c}+ax+by+cz(x, y)$, получаем уравнение 6.30

$$(u_x-a)(cu+ku_y)=c^2.$$

34—42. $f(x, y)pq+\dots$

6.34. $2xpq-zq=a$.

$$z^2=2(y-A)(Bx-a).$$

6.35. $2xpq-zq+ap=0$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл pq. Если разрешить уравнения $pq=A$ и данное относительно p, q, то получим:

$$ap=-Ax+\sqrt{aAz+A^2x^2},\qquad zq=Ax+\sqrt{aAz+A^2x^2}.$$

Эти уравнения легко решаются подстановкой $z = x^2 u(x, y)$ и затем $v^2 = aAu + A^2$. В итоге получаем соотношение для полного интеграла

$$(aAz + A^2x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} aA^2 (xz + ay) = A^3x^3 + B.$$

6.36. $\boldsymbol{ypq - zp + aq = 0,\ a \neq 0.}$

(а) Напишем характеристические уравнения

$$\begin{cases} x'(t) = yq - z, \ y'(t) = yp + a, \\ z'(t) = 2ypq - zp + aq, \ p'(t) = p^2, \ q'(t) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Из них получим первый интеграл q. Если положить $q = A$, определить p из данного уравнения и затем проинтегрировать, то получается полный интеграл

$$z = Ay \pm \sqrt{2aAx + B}. \qquad (2)$$

(б) Применим преобразование Лежандра ч. I, п. 11.14; придем к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению для Z:

$$Z_X - \frac{Z}{X} = \frac{aY}{X^2}$$

(Y — параметр). Найдем Z, а затем, обращая преобразование Лежандра, мы получим параметрическое представление

$$x = \Omega(Y) + \frac{aY}{2X^2}, \quad y = X\Omega'(Y) - \frac{a}{2X}, \quad z = XY\Omega'(Y) + \frac{aY}{2X}. \qquad (3)$$

При этом, разумеется, предполагается, что $X \neq 0$, т. е. что $z_x \neq 0$. Если же для решения $z_x = 0$ в конечной области, то из дифференциального уравнения следует также, что $z_y = 0$, и поэтому получается лишь тривиальное решение $z = \text{const}$.

Далее, предполагается, что при преобразовании Лежандра

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0.$$

Если же $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$ в конечной области, то из данного уравнения после дифференцирования по x и y следует:

$$z_{xx}(yz_y - z) + z_{xy}(yz_x + a) = z_x^2,$$
$$z_{xy}(yz_y - z) + z_{yy}(yz_x + a) = 0,$$

и отсюда $z_x^2 z_{yy} = 0$, $z_x^2 z_{xy} = 0$. Если в области $z_x = 0$, то это уже рассмотренный раньше частный случай. Если, напротив, $z_x^2 \neq 0$, то, следовательно, $z_{yy} = z_{yx} = 0$, и отсюда $z_y = \text{const}$, т. е.

$z = Ay + \varphi(x)$. Если подставить это в дифференциальное уравнение, то можно определить φ и снова получить полный интеграл (2).

Если в (3) положить $\Omega(Y) = \frac{A}{2}Y + B$, то можно исключить из (3) параметры X, Y и получить полный интеграл

$$z = \frac{x - B}{A}\left(y \pm \sqrt{y^2 + aA}\right).$$

(в) Преобразование Эйлера ч. I, п. 11.15 приводит к цели в обеих формах — и

$$x = Z_X, \quad y = Y, \quad z = XZ_X - Z, \quad z_x = X, \qquad z_y = -Z_Y \quad (\text{в}_1)$$

и

$$x = X, \quad y = Z_Y, \quad z = YZ_Y - Z, \quad z_x = -Z_X, \quad z_y = Y. \qquad (\text{в}_2)$$

(в_1) С помощью этого преобразования из данного уравнения получается линейное уравнение

$$X^2 Z_X + (XY + a)\,Z_Y = XZ$$

с интегралами

$$Z = X\Omega\left(\frac{2XY + a}{X^2}\right).$$

С помощью обратного преобразования для первоначального уравнения получают интегралы в параметрическом представлении

$$x = \Omega(u) - \left(u + \frac{a}{X^2}\right)\Omega'(u), \quad z = xX - X\Omega(u),$$

где $u = \frac{2yX + a}{X^2}$.

Если исследовать, какие интегралы пропадают из-за предположений $X \neq 0$ (т. е. из-за $z_x \neq 0$) и $z_{xx} \neq 0$, то выясняется, что таковыми являются лишь тривиальные интегралы $z = \text{const}$.

Если, в частности, положить $\Omega(u) = A(u) + B$, то снова получают полный интеграл (2).

(в_2) В этом случае данное уравнение превращается в уравнение

$$ZZ_X = aY,$$

следовательно,

$$Z^2 = 2a\,XY + 2\Omega(Y).$$

Обратным преобразованием приходят к параметрическому представлению

$$(z - yY)^2 = 2axY + 2\Omega(Y), \qquad y^2 = \frac{[ax + \Omega'(Y)]^2}{2axY + 2\Omega(Y)}.$$

Полагая $\Omega(u)=Au-B$, получаем полный интеграл

$$z=\frac{By}{ax+A}-\frac{ax+A}{2y}.$$

(г) Чтобы получить интегральную поверхность, проходящую через данную начальную полосу, можно для характеристических уравнений (1) определить решения, которые при $t=0$ содержат интегральный элемент x_0, y_0, z_0, $p_0\neq 0$, q_0. Из двух последних характеристических уравнений и первоначального уравнения имеем:

$$q=q_0,\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}-t,\quad ypq-zp+aq=0. \tag{4}$$

Если подставить эти выражения в два первых характеристических уравнения, то получим уравнения

$$x'=\frac{aq_0}{p_0}(p_0t-1),\qquad y'+\frac{p_0y}{p_0t-1}=a,$$

откуда

$$x=x_0+aq_0\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{p_0}\right)\qquad y=-\frac{2p_0y_0+a}{2p_0(p_0t-1)}+\frac{a}{2p_0}(p_0t-1). \tag{5}$$

Затем из третьего уравнения (4) получаем:

$$z=-\frac{q_0}{2p_0}\left(\frac{2y_0p_0+a}{p_0t-1}+a(p_0t-1)\right) \tag{6}$$

Таким образом, характеристические уравнения проинтегрированы.

Если требуется получить интегральную поверхность, проходящую через начальную полосу

$$x=\omega_1(s),\quad y=\omega_2(s),\quad z=\omega_3(s),\quad p=\omega_4(s),\quad q=\omega_5(s), \tag{7}$$

то функции ω_i должны удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных и условию полосы

$$\omega_3'=\omega_4\omega_1'+\omega_5\omega_2'.$$

Если подставить в соотношения (5), (6) выражения

$$x_0=\omega_1,\quad y_0=\omega_2,\quad z_0=\omega_3,\quad p_0=\omega_4,\quad q_0=\omega_5,$$

то получается интегральная поверхность в параметрическом представлении с параметрами s, t.

6.37. $p(kyq+ax+by+cz)=1,\quad k\neq 0.$

Из характеристических уравнений следует:

$$\frac{y'}{ky}+\frac{q'}{(k+c)q+b}=0. \tag{1}$$

(а) $k+c \neq 0$. Тогда получается из уравнения (1)

$$q = -\frac{b}{k+c} + Ay^{-1-\frac{c}{k}};$$

и, следовательно,

$$z = -\frac{b}{k+c}\,y - \frac{k}{c}\,Ay^{-\frac{c}{k}} + \varphi(x).$$

Если подставить выражение для z в исходное дифференциальное уравнение, то получается соотношение

$$(c\varphi + ax)\,\varphi' = 1, \tag{2}$$

или, если $u(x) = c\varphi + ax$,

$$\frac{uu'}{au+c} = 1;$$

здесь нужно различать случаи $a \neq 0$ и $a = 0$.

(б) $k + c = 0$, т. е. $k = -c$. Тогда из уравнения (1) получается

$$q = \frac{b}{c}\ln y + A,$$

и, следовательно,

$$z = \frac{b}{c}\,y(\ln y - 1) + Ay + \varphi(x),$$

причем для φ снова получается уравнение (2).

Если $k + c \neq 0$, то преобразованием

$$ax + \frac{bc}{k+c}\,y + cz = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = x, \quad \eta = \ln y$$

можно свести данное уравнение к типу 6.30

$$(\zeta_\xi - a)(k\zeta_\eta + c\zeta) = c^2.$$

6.38. $(x-y)\,pq + (x-z)\,p + (z-y)\,q = 0.$

После преобразования Лежандра приходим к дифференциальному уравнению 2.29

$$X(2Y - X + 1)\frac{\partial Z}{\partial X} - Y(2X - Y + 1)\frac{\partial Z}{\partial Y} = (Y - X)\,Z$$

с интегралами

$$Z = (X + Y - 1)\,\Omega(u), \qquad u = \frac{(X+Y-1)^3}{XY}. \tag{1}$$

Отсюда для первоначального уравнения получаем интегралы в параметрическом виде

$$z = xX + yY - Z, \quad x = \Omega(u) + \frac{u}{X}(2X - Y + 1)\,\Omega'(u),$$

$$y = \Omega(u) + \frac{u}{Y}(2Y - X + 1)\,\Omega'(u)$$

(сюда надо приписать еще уравнения (1)).

6.39. $xypq = 1$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, получаем дифференциальное уравнение 6.21 $\zeta_\xi \zeta_\eta = 1$. Таким образом находим полный интеграл

$$z = A \ln x + \frac{\ln y}{A} + B.$$

6.40. $xypq = z^2$; однородное уравнение.

Полагая

$$z = \pm e^{\zeta(\xi, \eta)}, \quad \xi = \ln x, \quad \eta = \ln y,$$

получаем уравнение 6.21 $\zeta_\xi \zeta_\eta = 1$.

6.41. $(x^2+1)\,p\,(q-1) + xy^2 q = 0$.

Можно разделить переменные

$$\frac{x^2+1}{x}\,p = \frac{y^2 q}{1-q};$$

получается полный интеграл

$$z = \pm \frac{A^2}{2} \ln(x^2+1) + B + \begin{cases} A \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{y}{A} & \text{при верхнем знаке;} \\ A \cdot \operatorname{Arth} \dfrac{y}{A} \text{ или } A \cdot \operatorname{Arcth} \dfrac{y}{A} & \\ \text{при нижнем знаке.} & \end{cases}$$

6.42. $[(1-x)^2 - y]\,[(1-x)(1-p) - z]\,q = a(1-x)^2$.

После замены $z = (1-x)\,Z(u)$, $u = \dfrac{y}{(1-x)^2}$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $Z(u)$. Поэтому интегралом, регулярным в точке $x = 0$, $y = 0$ и равным нулю при $y = 0$, будет

$$z = (1-x) \int_0^u \frac{1}{4u}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8au}{1-u}}\right) du.$$

43—48. $f(z)\,pq + \ldots$

6.43. $zpq = ap + bz$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$$-a \ln\left|a \pm \sqrt{4Abz^2 + a^2}\right| \pm \sqrt{4Abz^2 + a^2} = 2b(x + Ay + B).$$

6.44. $zpq = xp + yq$.

Из характеристических уравнений получается первый интеграл $\dfrac{p}{q}$ и (см. ч. I, п. 9.3) полный интеграл

$$z^2 = \frac{1}{AB}(Ax + By)^2 + C.$$

6.45. $zpq + x^2yp + xy^2q = xyz$.

Полагая $z^2 = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$, получаем дифференциальное уравнение Клеро

$$\zeta = \xi\zeta_\xi + \eta\zeta_\eta + \zeta_\xi\zeta_\eta,$$

а отсюда — полный интеграл

$$z^2 = Ax^2 + By^2 + AB.$$

Функция $z = 0$ является особым интегралом.

6.46. $(z + a)pq = bz^2$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi)$, $\xi = x + Ay$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(\zeta + a)\zeta'^2 = b\zeta^2;$$

из него находим:

$$\xi + B = \pm\sqrt{\frac{A}{b}}\int\frac{\sqrt{\zeta + a}}{\zeta}\,d\zeta.$$

Интеграл легко берется, если сделать замену переменных $\zeta + a = u^2$. Решением также является $z = 0$.

6.47. $(a + b)zpq + axq + byp = 0$; однородное уравнение.

Полагая

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta),\ \xi = \frac{x^2}{2},\ \ \eta = \frac{y^2}{2},$$

получаем уравнение типа ч. I, п. 11. 3.

$$(a + b)\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta + a\zeta_\eta + b\zeta_\xi = 0;$$

из него находим полный интеграл

$$z^2 = C - \frac{aB + bA}{(a + b)AB}(Ax^2 + By^2).$$

6.48. $z^2pq = xy + a$.

Полагая $2u(x, y) = z^2$, получаем уравнение 6.22

$$u_xu_y = xy + a.$$

Для решения данного уравнения можно также воспользоваться тем, что оно имеет первые интегралы $z^2p^2 - y^2$, $z^2q^2 - x^2$, $(xp - yq)z$.

49—54. $(\ldots)p^2 + (\ldots)pq + \ldots$

6.49. $ap^2 + bpq = cz^2$; уравнения типа ч. I, п. 11.3.

$$z = C\exp[(Ax + By)R],\quad \text{где}\quad R^2 = \frac{c}{A(aA + bB)}.$$

6.50. $xp^2 - pq + ay^2 = 0.$

Из характеристических уравнений получаем первый интеграл pe^{-y}. Далее, рассматриваем систему

$$p = Ae^y, \quad q = \frac{a}{A} y^2 e^{-y} + Axe^y$$

и отсюда находим полный интеграл

$$z = Axe^y - \frac{a}{A}(y^2 + 2y + 2)\, e^{-y} + B.$$

6.51. $xp^2 + ypq = 1$; уравнение с разделяющимися переменными.

Из системы уравнений

$$xp - \frac{1}{p} = A, \quad yq = -A$$

получают полный интеграл

$$z = \sqrt{4x + A^2} + A \ln \left| \frac{\sqrt{4x + A^2} - A}{y} \right| + B.$$

6.52. $axp^2 - (ay + b)\, pq + cy\,(ay + b)^2 = 0.$

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\frac{p}{ay + b}$. Из него и из данного уравнения составляют систему

$$p = A\,(ay + b), \quad q = aAx + \frac{c}{A}\, y,$$

которая определяет полный интеграл

$$z = Ax\,(ay + b) + \frac{cy^2}{2A} + B.$$

6.53. $(z^2 + 1)\, yp^2 + xzpq = 4x^2y$; обобщенное уравнение.

Подстановка $z\,(x, y) = \zeta\,(\xi, \eta)$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$ сводит данное уравнение к уравнению типа ч. I, п. 11.3

$$(\zeta^2 + 1)\, \zeta_\xi^2 + \zeta\zeta_\xi\xi_\eta = 1.$$

6.54. $p^2 + z^2pq = z^2$; тип ч. I, п. 11.3.

Полагая $z\,(x, y) = \zeta\,(\xi)$, $\xi = Ax + By$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(A^2 + AB\zeta^2)\, \zeta'^2 = \zeta^2,$$

и отсюда — полный интеграл

$$\pm\,(Ax + By + C) = R + A \ln \frac{R - A}{z}, \quad \text{где} \quad R^2 = ABz^2 + A^2.$$

55—68. $ap^2+bq^2=f(x, y, z)$

6.55. $p^2+q^2=a^2$; частный случай уравнения 6.56.

Интегралами будут, например, плоскости

$$z=Ax+By+C, \quad \text{где} \quad A^2+B^2=a^2.$$

Характеристики, проходящие через каждую точку (ξ, η, ζ), образуют прямой круговой конус, ось которого параллельна оси z и который сам является интегральной поверхностью.

Если имеется интегральная поверхность, $z(x, y)$, которая для фиксированного $x=\xi$ содержит кривую

$$x=\xi, \; y=\eta, \; z=\omega(\eta) \quad \text{для} \quad -\infty<\eta<+\infty,$$

то $z(\xi, \eta)=\omega(\eta)$, т. е. $z_\eta(\xi, \eta)=\omega'(\eta)$, а потому, следовательно, должно быть $|\omega'(\eta)|\leqslant a$; тогда, в силу уравнения, $z_x(\xi, \eta)=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}$. Из характеристических уравнений $x'(t)=2p, \; y'(t)=2q, \; z'(t)=2p^2+2q^2, \; p'(t)=0, \; q'(t)=0$

находим:

$$p=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}, \quad q=\omega',$$
$$x=\xi\pm 2t\sqrt{a^2-\omega'^2}, \quad y=\eta+2t\omega', \quad z=\omega(\eta)+2a^2t.$$

Три последних уравнения можно рассматривать как параметрическое представление искомого интеграла. Исключая параметры t и η, получаем:

если $\omega(\eta)=c$, то $z=c\pm a(x-\xi)$;

если $\omega(\eta)=\alpha+\beta\eta$, то $z=\alpha+\beta y\pm(x-\xi)\sqrt{a^2-\beta^2}$;

если $\omega(\eta)=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{1+(\alpha+\beta\eta)^2}$,

то

$$z=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{[1+\beta(x-\xi)]^2+(\alpha+\beta y)^2}.$$

6.56. $ap^2+bq^2=c$; тип ч. I, п. 11.1.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+C, \quad \text{где} \quad aA^2+bB^2=c,$$

или

$$\frac{z^2}{c}=\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}.$$

6.57. $p^2+q^2=ay+b$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ax+\frac{2}{3a}(ay+b-A^2)^{\frac{3}{2}}+B.$$

6.58. $p^2+q^2=x+y$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=\frac{2}{3}(x+A)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-A)^{\frac{3}{2}}+B.$$

6.59. $p^2+q^2=x^2+y^2$; частный случай уравнения 6.74.

$$2z=x\sqrt{x^2\pm A^2}\pm A^2\begin{Bmatrix}\operatorname{Arsh}\\ \operatorname{Arch}\end{Bmatrix}\frac{x}{A}+y\sqrt{y^2\mp A^2}\mp$$

$$\mp A^2\begin{Bmatrix}\operatorname{Arch}\\ \operatorname{Arsh}\end{Bmatrix}\frac{y}{a}+B,$$

причем аргумент функции $\operatorname{Arch} u$ больше 1.

6.60. $p^2+q^2=x^2+xy+y^2$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $2\xi=x+y$, $2\eta=x-y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\xi^2-6\xi^2=2\eta^2-\zeta_\eta^2.$$

Отсюда находим полный интеграл

$$z=\int\sqrt{6\xi^2+A}\,d\xi+\int\sqrt{2\eta^2-A}\,d\eta+B.$$

Эти интегралы можно еще преобразовать при помощи гиперболических функций.

6.61. $p^2+q^2=ax^m+by^n+c$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=\pm\int\sqrt{ax^m+A}\,dx\pm\int\sqrt{by^n+c-A}\,dy.$$

6.62. $p^2+q^2=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}+b$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\rho, \vartheta)$, $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$\rho^2\zeta_\rho^2-b\rho^2-a\rho=-\zeta_\vartheta^2,$$

а из него — полный интеграл

$$z=\pm\int\sqrt{b+\frac{a}{\rho}-\frac{A^2}{\rho^2}}\,d\rho+A\vartheta+B.$$

6.63. $p^2+q^2=f(x)$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{f(x)-A^2}\,dx.$$

6.64. $p^2+q^2=f(x^2+y^2)$; уравнение Гамильтона для плоского движения точки под действием центральной силы.

Из характеристических уравнений следует:

$$(xq)'-(yp)'=0 \quad \text{или} \quad xq-yp=A.$$

Обозначим $r^2=x^2+y^2$; из этого уравнения и из первоначального следует, что

$$p=-\frac{Ay}{r^2}\pm\frac{x}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2},$$

$$q=\frac{Ax}{r^2}\pm\frac{y}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2},$$

или при $e^{\rho}=r^2$

$$z=-A\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\pm\frac{1}{2}\int\sqrt{e^{\rho}f(e^{\rho})-A^2}\,d\rho+B.$$

6.65. $p^2+q^2=f(x, y)$; тип ч. I, п. 11, 13.

Если представить уравнение в виде

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x, y)=C, \tag{1}$$

то это уравнение Гамильтона для плоского движения точки.

Характеристическая система уравнения (1) без среднего уравнения, т. е. без условия полосы, имеет вид

$$x'(t)=p,\ y'(t)=q, \quad p'(t)=-U_x, \quad q'(t)=-U_y.$$

Отсюда

$$x''(t)=-U_x(x, y), \quad y''(t)=-U_y(x, y).$$

Следовательно, уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$ можно рассматривать как уравнения движения точки с массой, равной 1, происходящего под действием потенциальной функции $U(x, y)$. Из характеристических уравнений следует:

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x, y)=C.$$

Значит, выражение $\frac{p^2+q^2}{2}$ — кинетическая энергия, а написанное выше уравнение есть выражение для закона энергии.

Если найдено однопараметрическое семейство интегралов $z=\psi(x, y, A)$ уравнения (1), причем $|\psi_{Ax}|+|\psi_{Ay}|>0$, то траекториями этого движения будут кривые, удовлетворяющие уравнению

$$\psi_A=\text{const}.$$

Уравнение (1) имеет большое значение для геометрической оптики. Если имеется неоднородная (но изотропная) среда с коэффициентом преломления $f(x, y)$ в точке (x, y), то

характеристики уравнения — пути световых лучей, и уравнение $z = \text{const}$ задает фронт волны.

6.66. $ap^2 + bq^2 = cz$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z = \frac{c}{4(aA^2 + bB^2)}(Ax + By + C)^2; \qquad z = 0.$$

6.67. $p^2 + q^2 = (x^2 + y^2) z$; однородное уравнение.

Полагая $u(x, y) = 2\sqrt{z}$, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2 - x^2 = y^2 - u_y^2;$$

следовательно,

$$u = \int \sqrt{x^2 + A}\, dx + \int \sqrt{y^2 - A}\, dy + B.$$

6.68. $p^2 + q^2 = az^2 + b$; тип. ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi)$, $\xi = Ax + By$, получаем

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{a\zeta^2 + b}} = \xi.$$

В частности, если $a = 1$, $b = 0$, то

$$z = C \exp \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

69—74. $f(x, y)\, p^2 + g(x, y)\, q^2 = h(x, y, z)$

6.69. $xp^2 - yq^2 = x + y$; частный случай уравнения 6.74.

$$z = \pm\left(\sqrt{x(x + A)} + \frac{A}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{|x + A|} + \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x + A|} - \sqrt{|x|}}\right|\right) \pm$$
$$\pm\left(\sqrt{y(A - y)} - A \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A - y}{y}}\right) + B,$$

если $x(x + A) > 0$, $y(A - y) > 0$; знаки перед скобками могут быть выбраны независимо друг от друга.

6.70. $ax^2p^2 + by^2q^2 = z^c$; однородное уравнение.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, получаем из данного уравнения

$$a\zeta_\xi^2 + b\zeta_\eta^2 = \zeta^c,$$

а отсюда замена переменных

$$\zeta = \begin{cases} u^{\frac{2}{2-c}}, & \text{если} \quad c \neq 2; \\ e^u, & \text{если} \quad c = 2 \end{cases}$$

приводит нас к уравнению 6.56

$$au_\xi^2+bu_\eta^2=\begin{cases}\left(\frac{2-c}{2}\right)^2, & \text{если } c\neq 2;\\ 1, & \text{если } c=2.\end{cases}$$

6.71. $(x+a_1)(x+a_2)p^2-(y+a_1)(y+a_2)q^2=a\sqrt{x+a_1}+b\sqrt{y+a_2}+c(x-y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z=\int\sqrt{\frac{A+cx+a\sqrt{x+a_1}}{(x+a_1)(x+a_2)}}\,dx+\int\sqrt{\frac{A+cy-b\sqrt{y+a_2}}{(y+a_1)(y+a_2)}}\,dy+B.$$

Если уравнение Гамильтона 6.65

$$\frac{p^2+q^2}{4}+U(x, y)=c, \qquad U=-\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2}$$

(уравнение движения точки с массой, равной 1, в плоскости x, y под действием гравитационных сил, создаваемых массами m_1, m_2, находящимися в точках $x=\pm 1$, $y=0$) преобразовать к эллиптическим координатам, то получится данное уравнение с $2a=m_1+m_2$, $2b=m_1-m_2$ и с λ_1, λ_2 вместо x, y. При этом точке (x, y) соответствуют как эллиптические координаты параметры λ_1, λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$, определяющие два конических сечения $\frac{x^2}{a_1+\lambda}+\frac{y^2}{a_2+\lambda}=1$ (рис. 22), которые проходят через точку (x, y) при фиксированном $a_1>a_2>0$, $a_1-a_2=1$.

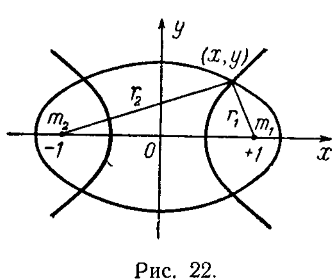


Рис. 22.

6.72. $4y(a-x)(b-x)(c-x)p^2-4x(a-y)(b-y)(c-y)q^2=(x-y)xy.$

Если поделить уравнение на xy, то можно разделить переменные. Тогда получается полный интеграл

$$z=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x(x+A)}{N(x)}}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{y(y+A)}{N(y)}}\,dy+B,$$

где

$$N(x)=(a-x)(b-x)(c-x).$$

Это уравнение встречается при отыскании геодезических линий на эллипсоиде с полуосями a, b, c.

6.73. $(p^2-1)\sin^2 x+q^2=0$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{1-\frac{A^2}{\sin^2 x}}\,dx.$$

Это уравнение возникает при введении ортогональных геодезических параметрических линий на единичном шаре.

6.74. $f(x)p^2+g(y)q^2=\varphi(x)+\psi(y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\int\sqrt{\frac{\varphi+A}{f}}\,dx+\int\sqrt{\frac{\psi-A}{g}}\,dy+B.$$

Уравнение встречается в дифференциальной геометрии при изучении поверхностей Лиувилля.

75—80. $f(x, y, z)p^2+g(x, y, z)q^2=h(x, y, z)$

6.75. $ap^2+bzq^2=c^2$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$$bB^2z=-aA^2+\left(\frac{3bcB^2}{2}(Ax+By+C)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

6.76. $z(p^2-q^2)=x-y$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $\xi=x-y$, $\eta=x+y$, получают уравнение

$$4\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta=\xi,$$

а из него подстановкой $\zeta=u(\xi)v(\eta)$ находят интеграл первоначального уравнения

$$8z^3=[3(x-y)^2+A][3(x+y)+B].$$

6.77. $xzp^2-yzq^2=x+y$; однородное уравнение.

Замена неизвестной функции

$$u(x, y)=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

приводит к уравнению 6.69 с разделяющимися переменными

$$x(u_x^2-1)=y(u_y^2+1).$$

6.78. $z^2(p^2+q^2)=x^2+y^2$; однородное уравнение.

Замена неизвестной функции $2u(x, y)=z^2$ приводит к уравнению 6.59

$$u_x^2+u_y^2=x^2+y^2.$$

6.79. $z^2(ap^2+bq^2)=z^2+c$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Применение метода ч. I, п. 11.3 приводит к полному интегралу

$$(aA^2+bB^2)(z^2+c)=(Ax+By+C)^2. \qquad (1)$$

Если подставить $z^2=u(x)+v(y)$, то можно разделить переменные и получить полный интеграл в виде

$$z^2=-c+\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}. \qquad (2)$$

Если $a=-1$, $b=-1$, $c=-r^2<0$, то соотношение (1) описывает цилиндрические поверхности, соотношение (2) — сферы

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=r^2.$$

Интегралами являются в этом случае также огибающие поверхности, если они есть, к тем из этих сфер, центры которых движутся в плоскости x, y вдоль одной кривой (при этом могут появляться ребра возврата), т. е. трубчатые и каналовые поверхности.

6.80. $z^2(y^2p^2+x^2q^2)=a^2x^2y^2$; однородное уравнение.

Замена переменных

$$2\zeta(\xi, \eta)=z^2, \qquad 2\xi=x^2, \qquad 2\eta=y^2$$

приводит к уравнению 6.55

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2=a^2.$$

81—88. $(\ldots)p^2+(\ldots)q^2+(\ldots)p+(\ldots)q+\ldots$

6.81. $p^2+q^2+xp+yq=z-1$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+A^2+B^2+1;$$

особый интеграл $4z+x^2+y^2=4$.

6.82. $p^2+q^2-2xp-2yq+2xy=0$.

Из характеристических уравнений получается первый интеграл $p+q-x-y$ и затем полный интеграл

$$2z=x^2+y^2+A(x+y)\pm(x-y)\sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}-\frac{A^2}{4}}\mp$$

$$\mp\frac{A^2}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arch}\frac{|x-y|\sqrt{2}}{A}+B,$$

причем $|x-y|>\frac{A}{\sqrt{2}}$ и функция Arch имеет здесь знак $x-y$.

Если применить преобразование

$$\zeta(\xi,\ \eta)=z-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2},\qquad \xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\qquad \eta=\frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

то получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2=2\xi^2,$$

которое снова приводит к написанному выше полному интегралу.

6.83. $\boldsymbol{p^2+q^2-2yp-2xq=1-x^2-y^2}$ или $(p-y)^2+(q-x)^2=1$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $p-y$ и $q-x$ и, таким образом, находят полный интеграл

$$z=xy+Ax+By+C,\qquad \text{где}\qquad A^2+B^2=1.$$

6.84. $\boldsymbol{p^2+q^2=4(xp+yq-z)}$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z=Ax+By-\dfrac{A^2+B^2}{4}$; особый интеграл $z=x^2+y^2$. Частные интегралы:

$$x^2+By-\frac{B^2}{4},\quad y^2+Ax-\frac{A^2}{4},\quad \frac{(Ax+By)^2}{A^2+B^2}.$$

6.85. $\boldsymbol{ap^2+bq^2+2cxp+2dyq=k,\ \ ab>0}$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z=u(x)+v(y)+B,$$

где u, v удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$au'^2+2cxu'=A,\qquad bv'^2+2dyv=k-A.$$

Если $A=0$, то либо $u=0$, либо $u=\frac{c}{a}x^2$, либо функция $u(x)$ описывает комбинацию этих двух кривых.

Если $c=0$, то нужно так выбрать знак числа A, чтобы $aA>0$; тогда $u=x\sqrt{\dfrac{A}{a}}$.

Если $A\neq 0$, $c\neq 0$, то имеем:

$$u=-\frac{c}{2a}x^2\pm\frac{c}{a}\int\sqrt{x^2+\frac{aA}{c^2}}\,dx.$$

Преобразование интеграла приводит при $\alpha>0$ [1]) к выражениям:

$$\int\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{\alpha},$$

$$\int\sqrt{x^2-\alpha^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{2}\frac{|x|}{x}\operatorname{Arch}\frac{|x|}{\alpha}\quad\text{для } |x|>\alpha;$$

при этом под $\operatorname{Arch}u$ для $u>0$ понимается положительная ветвь этой функции.

Таким же образом исследуется уравнение для v.

6.86. $\mathbf{p^2-q^2-2zp+z^2=1}$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi)$, $\xi=Ax+By$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(A^2-B^2)\zeta'=A\zeta\pm\sqrt{B^2\zeta^2+A^2-B^2};$$

для нахождения полного интеграла надо разрешить уравнение

$$Ax+By+C=\int\frac{A^2-B^2}{Az\pm\sqrt{B^2z^2+A^2-B^2}}\,dz.$$

6.87. $\mathbf{(x^2-1)[x^2(xp-z)^2-x^2p^2-q^2]+x^2z^2=0.}$

Полагая $z=u(x, y)\sqrt{|x^2-1|}$, получаем уравнение

$$x^2(x^2-1)u_x^2-u_y^2=0.$$

При $x^2<1$ должно быть $u_x=u_y=0$, и, следовательно, интеграл $z=C\sqrt{1-x^2}$. При $x^2>1$ дифференциальное уравнение можно записать как распадающееся уравнение

$$\left(x\sqrt{x^2-1}\,u_x+u_y\right)\left(x\sqrt{x^2-1}\,u_x-u_y\right)=0;$$

каждый из множителей дает линейное уравнение. Для этих уравнений в качестве интегрального базиса находим функции

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\mp y;$$

следовательно, интегралы данного уравнения

$$z=\sqrt{x^2-1}\,\Omega\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\pm y\right).$$

6.88. $\mathbf{(zp+x)^2+(zq+y)^2-a^2z^2(p^2+q^2+1)=0.}$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $zp+x$ и $zq+y$. Они дают два уравнения, которые состоят в инволюции не только с данным уравнением, но и друг

---

[1]) [Где через α^2 обозначено либо $\frac{aA}{c^2}$, либо $-\frac{aA}{c^2}$. — *Прим. ред.*]

с другом. Поэтому можно применить метод ч. I, п. 9.2 и получить в качестве полного интеграла семейство полусфер

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=\frac{A^2+B^2}{a^2}\quad (z \gtrless 0).$$

При $a^2>1$ имеется особый интеграл

$$(a^2-1)\,z^2=x^2+y^2.$$

89—111. $(\,.\,.\,)\,p^2+(\,.\,.\,)\,q^2+(\,.\,.\,)\,pq+\dots$

6.89. $\boldsymbol{p^2+q^2=apq}$; уравнение типа ч. I, п. 11.2.

$$z=Ax+By+C,\text{ где } A^2+B^2=aAb.$$

6.90. $\boldsymbol{xp^2+yq^2=2pq}$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. Если положить его равным $\frac{1}{A}$ и использовать данное уравнение, то находят:

$$\frac{p}{A}=\frac{1-x}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-xy},\quad \frac{q}{A}=\frac{y-1}{y}\pm\frac{1}{y}\sqrt{1-xy},$$

и при этом полный интеграл

$$z=A(y-x)+$$
$$+A\ln\left|\frac{x}{y}\right|\pm A\left(2\sqrt{1-xy}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-xy}}{1+\sqrt{1-xy}}\right|\right)+B.$$

6.91. $\boldsymbol{z(p-q)^2+a(p+q)^2=b}$; уравнение типа ч. I, п. 11.13.

$$z=-a\left(\frac{A+B}{A-B}\right)^2+\sqrt[3]{b}\left(\frac{3(Ax+By+C)}{2(A-B)}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \text{если}\quad A\neq B.$$

6.92. $\boldsymbol{(p^2+4q^2)\operatorname{ch}^2 y-4pq\operatorname{ch} y\cdot\operatorname{sh} y=1}$.

Разрешая уравнение относительно p, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$p=2q\operatorname{th} y\pm\frac{\sqrt{1-4q^2}}{\operatorname{ch} y},$$

а отсюда — полный интеграл

$$z=Ax+\frac{A}{2}\ln\operatorname{ch} y\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-A^2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} y+B.$$

6.93. $\boldsymbol{(yp-xq)^2+a(xp+yq)=b}$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $xp+yq$, $yp-xq$. Если теперь положить $yp-xq=A$,

то из этого и исходного уравнений можно найти p, q и затем — полный интеграл

$$z=\frac{b-A^2}{2a}\ln(x^2+y^2)-A\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+B.$$

Если применить преобразование

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,$$

то получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\vartheta^2=-a\rho\zeta_\rho+b,$$

т. е.

$$\zeta=A\vartheta+\frac{b-A^2}{a}\ln\rho+B,$$

что приводит в старых переменных к уже найденному выше выражению.

6.94. $(yp-xq)^2+az(xp+yq-z)=0.$

Замена переменных $z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta)$, $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$ приводит к уравнению 6.13

$$\zeta_\vartheta^2+a\zeta(\rho\zeta_\rho-\zeta)=0.$$

6.95. $(yp-xq)^2=p^2+q^2+1.$

Из характеристических уравнений находят первый интеграл p^2+q^2. Полагают:

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta$$

и получают уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\vartheta^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}(\zeta_\rho^2+1),$$

а из него — полный интеграл

$$\zeta=\sigma-A\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{A}+A\vartheta+B,\quad \text{где}\quad \sigma^2=\rho^2(A^2-1)-A^2.$$

6.96. $(yp-xq)^2=a(x^2+y^2)(p^2+q^2+1).$

Замена переменных

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta$$

приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{1-a}{a}\zeta_\vartheta^2=\rho^2(\zeta_\rho^2+1),$$

разрешимому только для $0\leqslant a<1$. Если отбросить тривиальный случай $a=0$ и приравнять левую и правую части послед-

него уравнения к A^2, то получается полный интеграл

$$\zeta = A\sqrt{\frac{a}{1-a}}\,\vartheta + \sigma + \frac{A}{2}\ln\left|\frac{\sigma - A}{\sigma + A}\right| + B, \quad \text{где} \quad \sigma^2 = A^2 - \rho^2$$

(следовательно, необходимо требование $\rho^2 < A^2$).

6.97. $(xp + yq)^2 = (1 - z^2)(p^2 + q^2)$.

Особые интегралы: $z = \mathrm{const}$ и обе полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (z \lesseqgtr 0).$$

Это уравнение интересно тем, что первый интеграл p/q находится легко, но метод ч. I, п. 9.3, несмотря на это, не приводит к полному интегралу. Дело в том, что указанные в ч. I, п. 9.3 условия для функционального определителя не выполняются, так как уравнение однородно относительно p, q, то при подстановке $p = Aq$ обе производные пропадают. Однако таким методом получают еще семейство интегралов

$$z^2 = 1 - \frac{(Ax + By)^2}{A^2 + B^2}.$$

Чтобы получить полный интеграл, можно сделать преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \quad x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta.$$

Тогда получается уравнение

$$(1 - \zeta^2)\,\zeta_\vartheta^2 = \rho^2(\zeta^2 + \rho^2 - 1)\,\zeta_\rho^2.$$

Из исходного уравнения вытекает, что $z^2 \leqslant 1$; следовательно, $\zeta^2 \leqslant 1$, а отсюда, в силу написанного выше уравнения, $\zeta^2 + \rho^2 - 1 \geqslant 0$. Поэтому написанное выше уравнение распадается на два квазилинейных уравнения

$$\sqrt{1 - \zeta^2}\,\zeta_\vartheta \pm \rho\sqrt{\zeta^2 + \rho^2 - 1}\,\zeta_\rho = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения получают интеграл

$$\Omega\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\rho^2}{1-\zeta^2} - 1} - \vartheta\right)\right).$$

Следовательно, интегралы первоначального уравнения находятся разрешением относительно z уравнения

$$\Omega\left(z, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-z^2} - 1} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\right) = 0.$$

6.98. $(xp+yq)^2=z^2(pq+1)$.

Из характеристических уравнений находится первый интеграл q/p; теперь можно действовать по методу ч. I, п. 9.3. Если положить

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

то данное уравнение перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\xi^2\zeta'^2=\zeta^2(AB\zeta'^2+1),$$

являющееся однородным. Из него следует:

$$\ln\left|\zeta\left(\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2}\right)\right|=C-\frac{\xi}{\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2}};$$

отсюда, после возвращения к старым переменным и разрешения относительно z, получается полный интеграл.

6.99. $(xp+yq)^2-z(xp+yq)=pq$.

Посредством преобразования Лежандра ч. I, п. 11.14 получают квазилинейное дифференциальное уравнение 2.52.

$$XZZ_X+YZZ_Y=XY.$$

Интегралы этого уравнения получают из соотношения

$$Z^2=XY+\Omega\left(\frac{Y}{X}\right),$$

а интегралы первоначального уравнения задаются параметрически:

$$z=-\frac{1}{Z}\Omega\left(\frac{Y}{X}\right),\qquad 2xZ=Y-\frac{Y}{X^2}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right),$$

$$2yZ=X+\frac{1}{X}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right),\qquad Z^2=XY+\Omega\left(\frac{Y}{X}\right).$$

6.100. $(xp+yq)^2-a^2(p^2+q^2+1)=0$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл q/p. Если положить $q=p\operatorname{tg}A$, то из данного уравнения получается:

$$\frac{p}{\cos A}=\frac{q}{\sin A}=\pm\frac{a}{\sqrt{(x\cos A+y\sin A)^2-a^2}}$$

следовательно,

$$z=a\operatorname{Arch}\frac{x\cos A+y\sin B}{a}+B.$$

Можно также положить $z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta)$, $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$ и прийти к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{\rho^2}{a^2}\left[(\rho^2 - a^2)\zeta_\rho^2 - a^2\right] = \zeta_\vartheta^2.$$

Если в этом равенстве положить левые и правые части равными A^2, то получается:

$$\zeta = a\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} - A\operatorname{arctg}\frac{a\sigma}{A} + A\vartheta + B, \quad \text{где} \quad \sigma^2 = \frac{\rho^2 + A^2}{\rho^2 - a^2}.$$

6.101. $(xp + yq)^2 + p^2 + q^2 - z(xp + yq) = 0.$

С помощью преобразования Лежандра ч. I, п. 11.14 получают квазилинейное дифференциальное уравнение 2.53

$$XZZ_X + YZZ_Y = -X^2 - Y^2.$$

Из решений

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Omega(u), \qquad u = \frac{Y}{X} \tag{1}$$

этого уравнения (где $\Omega(u)$ — такая произвольная непрерывно дифференцируемая функция, что $\Omega\left(\frac{Y}{X}\right) > X^2 + Y^2$ в конечной области X, Y) получается решение первоначального уравнения в параметрическом представлении:

$$z = xX + yY - Z, \qquad x = -\frac{X}{Z} - \frac{Y}{2X^2Z}\Omega'(u),$$

$$y = -\frac{Y}{Z} + \frac{1}{2XZ}\Omega'(u).$$

Кроме того, интегралами являются функции $z = \text{const}$.

6.102. $(xp + yq - z)^2 = pq.$

Дифференциальное уравнение распадается на два уравнения Клеро

$$z = xp + yq \pm \sqrt{pq}$$

с полными интегралами

$$z = Ax + By \pm \sqrt{AB}, \quad AB \geqslant 0.$$

6.103. $(xp + yq - z)^2 = ap^2 + bq^2 + c.$

Уравнение распадается на два уравнения Клеро

$$z = xp + yq \pm \sqrt{ap^2 + bq^2 + c}$$

с полными интегралами

$$z = Ax + By \pm \sqrt{aA^2 + bB^2 + c}.$$

Особые интегралы получаются из соотношения

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1.$$

6.104. $(xp+yq-z)^2=xp^2+yq^2.$

С помощью преобразования Лежандра получают квазилинейное уравнение 2.39

$$X^2Z_X+Y^2Z_Y=Z^2, \qquad (1)$$

его решения—функции

$$Z=\left[\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{X-Y}{XY}\right)\right]^{-1}.$$

При этом решения первоначального уравнения получают в параметрическом представлении с параметрами X, Y:

$$z=[u\Omega'(u)-\Omega(u)]Z^2, \quad x=\frac{Z^2}{X^2}[1-\Omega'(u)], \quad y=\frac{Z^2}{Y^2}\Omega'(u),$$

где

$$u=\frac{X-Y}{XY}, \qquad Z=\left[\frac{1}{X}+\Omega(u)\right]^{-1}.$$

Если рассматривать уравнение (1) как однородное (ч. I, п. 11.10), т. е. положить

$$Z(X, Y)=\zeta(\xi, \eta), \quad \xi=\frac{1}{X}, \quad \eta=\frac{1}{Y},$$

то получается уравнение типа ч. I, п. 11.3

$$\zeta_\xi+\zeta_\eta+\zeta^2=0.$$

Для уравнения (1) получают полный интеграл

$$\frac{1}{Z}=\frac{A}{X}+\frac{B}{Y}+C, \quad \text{где} \quad A+B=1,$$

и отсюда — полный интеграл первоначального уравнения

$$\sqrt{-Cz}=\sqrt{Ax}+\sqrt{By}-1.$$

6.105. $(xp+yq-z)^2=[a^2(x^2+y^2+z^2+1)-1](p^2+q^2+1).$

Если перейти методом ч. I, п. 12.3 (а) к дифференциальному уравнению, которое не содержит искомой функции, т. е. определить функцию $z(x, y)$ из уравнения $w(x, y, z)=0$, то для w получается уравнение 7.20

$$(xw_x+yw_y+zw_z)^2=$$
$$=\left[a^2\left(x^2+y^2+z^2+1\right)-1\right]\left(w_x^2+w_y^2+w_z^2\right).$$

6.106. $(xp+yq-z)^2=a^2(x^2+y^2+z^2)^2(p^2+q^2+1)$.

Полный интеграл получают из соотношения

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=\frac{1}{4a^2}$$

при условии, что

$$A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4a^2};$$

особый интеграл

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a^2}.$$

6.107. $(xp+yq-z)^2=f(x^2+y^2)(p^2+q^2)$.

Из характеристических уравнений получаем, что $(yp-xq)/z$ — специальный интеграл. Если положить его равным A и использовать первоначальное уравнение, то можно определить p, q и затем, проинтегрировав, найти z. Ср. с 9.3, пример 2.

Если положить

$$\ln|z(x,\ y)|=\zeta(\rho,\ \vartheta),\qquad x=\rho\cos\vartheta,\qquad y=\rho\sin\vartheta,$$

то уравнение переходит в уравнение

$$(\rho\zeta_\rho-1)^2=f(\rho^2)\left(\zeta_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\zeta_\vartheta^2\right),$$

в котором можно разделить переменные.

6.108. $x^2(xp+yq-z)^2=y^2q$; тип ч. I, п. 11.7.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\left(\frac{y}{x}\right)^2q$. Если положить его равным A^2 (так как из уравнения следует, что $q\geqslant 0$), то, используя начальное уравнение, можно получить уравнения

$$q=\left(\frac{Ax}{y}\right)^2,\quad xp+\frac{Ax^2}{y}-z=A,$$

откуда, проинтегрировав, имеем:

$$z=-\frac{A^2x^2}{y}+A+Bx;$$

это — конусы, вершины которых лежат на оси z.

6.109. $(x^2+y^2-1)[(xp+yq-z)^2-(p^2+q^2)]+z^2=0$.

Подстановка

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi,\ \eta),\qquad x=\rho\cos\vartheta,\qquad y=\rho\sin\vartheta$$

приводит к уравнению 6.87

$$(\rho^2-1)\left[\rho^2(\rho\zeta_\rho-\zeta)^2-\rho^2\zeta_\rho^2-\zeta_\vartheta^2\right]+\rho^2\zeta^2=0.$$

6.110. $f(x, y)\,p^2+g(x, y)\,pq+h(x, y)\,q^2=k(x, y)$.

В дифференциальной геометрии уравнение встречается в следующем виде:

$$E\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2=EG-F^2;$$

при этом задаются основные величины E, F, G.

6.111. $(f_x p+f_y q-f_z)^2=(f_x^2+f_y^2+f_z^2-1)(p^2+q^2+1)$,

$$f=f(x, y, z).$$

Геометрическую интерпретацию задачи см. S. Lie, Math. Annalen 5 (1872), стр. 198.

112—127. Уравнения третьей и четвертой степени относительно p, q

6.112. $p^3=aq+bx$; уравнение с разделяющимися переменными

$$z=\frac{3}{4b}(bx+A)^{\frac{4}{3}}+\frac{A}{a}y+B.$$

6.113. $5p^3+(x-2)p+(y-1)q=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+5A^3-2A-B.$$

Интегралами также являются:

$$z=-10\left(\frac{2-x}{15}\right)^{\frac{3}{2}}+C(y-1).$$

Особого интеграла нет.

6.114. $p^3-y^3q=x^2-y^2$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\ln|y|-\frac{A}{2y^2}+\int\sqrt[3]{x^2+A}\,dx+B.$$

6.115. $p^3=zq$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=\frac{A}{4}(x+Ay+B)^2.$$

6.116. $p^3=az^2q$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=B\exp\left[\pm\sqrt{aA}(x+Ay)\right].$$

6.117. $p^3=q^2$; тип ч. I, п 11.2.

$$z=A^2x+A^3y+B.$$

6.118. $y^2p^3+xp+3yq=0$ см. ч. I, 14.8 (в).

6.119. $p^2q=x^2y$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{Ax^2}{2}+\frac{y^2}{2A^2}+B.$$

6.120. $(p^2+a)q=(bz+c)p$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=\frac{b}{4AB}(Ax+By+C)^2+\frac{aB-Ac}{Ab}.$$

6.121. $p^2(q+a)=(bz+c)q$; тип ч. I, п. 11.3.

$$bB(Ax+By+C)=AR+aA^2\ln|R-aA|,$$

где

$$R^2=4bB^2z+a^2A^2+4cB^2.$$

6.122. $(xp+yq+z)q^2+p^2=0$.

Из характеристических уравнений находят первый интеграл $\frac{p}{q}$. Если положить его равным A, то получаются уравнения

$$p=-A\frac{z+A^2}{Ax+y},\qquad q=-\frac{z+A^2}{Ax+y};$$

отсюда и из исходного уравнения получается полный интеграл

$$z=-A^2+\frac{B}{Ax+y}.$$

6.123. $(xp+yq-z)^3+27pq=0$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z=Ax+By+3\sqrt[3]{AB}$; особый итеграл $yzx=1$.

6.124. $(xp+yq)pq-xp^2-yq^2-(x+y+z-1)pq+z(p+q)=0$.

Уравнение можно записать как уравнение Клеро

$$z=xp+yq+\frac{pq}{pq-p-q},$$

если знаменатель $\neq 0$, т. е. если исключены тривиальные интегралы $z=C$. Полный интеграл

$$z=Ax+By+\frac{AB}{AB-A-B},$$

или, при другом обозначении констант,

$$z=(A+B-1)\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}-1\right);$$

особый интеграл

$$z=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)^2.$$

6.125. $9(p^2-2z)^2=4q^3$; тип ч. I, п. 11.3.

Уравнение можно решать и с помощью замены $z=u(x)+v(y)$.

Полный интеграл

$$z=\frac{(x+A)^2}{2}+\frac{(y+B)^3}{3},$$

особые интегралы:

$$z=0 \quad \text{и} \quad z=\frac{(x+A)^2}{2}.$$

6.126. $z^2p^2q^2=y^2p^2+x^2q^2$; однородное уравнение.

Полагая

$$z(x, y)=\zeta(\xi, \eta), \qquad \xi=x^2, \qquad \eta=y^2,$$

получаем уравнение

$$4\zeta^2\zeta_\xi^2\zeta_\eta^2=\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2.$$

Отсюда находим тривиальный интеграл $z=C$ и полный интеграл

$$z^2=\frac{\sqrt{A^2+1}}{A}(x^2+Ay^2)+B.$$

6.127. $(xp+yq-z)^2(xp^2+yq^2)=p^2q^2$.

После применения преобразования Лежандра ч. I, п. 11.13 получается квазилинейное дифференциальное уравнение 2.64

$$X^2Z^2Z_X+Y^2Z^2Z_Y=X^2Y^2.$$

Интегралы этого уравнения получают из равенства

$$Z^3\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right)^3-3\left(\frac{Y}{X}-\frac{X}{Y}\right)+6\log\left|\frac{Y}{X}\right|=\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right).$$

Эти уравнения вместе с соотношениями

$$x=Z_X, \qquad y=Z_Y, \qquad z=xX+yY-Z$$

дают параметрическое представление искомых интегралов $z(x, y)$.

128—139. Прочие нелинейные уравнения

6.128. $\sqrt{p}+\sqrt{q}=ax$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{(ax-A)^3}{3a}+A^2y+B \quad \text{для} \quad ax>A.$$

6.129. $\sqrt{p^2+q^2+1}+xp+yq=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+\sqrt{A^2+B^2+1};$$

особый интеграл — верхняя половина ($z > 0$) сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Интегралы — те гладкие поверхности, все касательные плоскости к которым отстоят от начала координат на расстояние, равное единице.

6.130. $\sqrt{\sqrt{q} - p} + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax + By + \sqrt{\sqrt{B} - A}$$

или, при других значениях констант,

$$z = (A - B^2)\,x + A^2 y + B;$$

особый интеграл

$$z = \frac{1}{4x} - \frac{x^2}{4y} \quad \text{для} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

6.131. $(pq)^a = xp - yq$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл pq. Если положить $pq = A$, то, используя исходное уравнение, можно получить уравнения

$$p = \frac{A^a}{2x} \pm \frac{1}{2x}\sqrt{4xyA + A^{2a}}, \qquad q = \frac{A}{p},$$

и отсюда найти полный интеграл

$$A^{-a} z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{y}\right| \pm R \pm \frac{1}{2}\ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right| + B,$$

где

$$R = \sqrt{4xyA^{1-2a} + 1}.$$

6.132. $(p^2 + q^2)^a = xq - yp$.

Из двух последних характеристических уравнений получают первый интеграл $p^2 + q^2$. Если положить его равным A, то для определения полного интеграла получаются два уравнения

$$z_x = \frac{-A^a y + xR}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{A^a x + yR}{x^2 + y^2}, \quad \text{где} \quad R^2 = A(x^2 + y^2) - A^{2a}.$$

Можно также применить преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \qquad x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho\sin\vartheta,$$

тогда получается уравнение

$$\zeta_\rho^2 = \zeta_\vartheta^{\frac{1}{a}} - \frac{\zeta_\vartheta^2}{\rho^2}.$$

Полный интеграл

$$\zeta = A\vartheta + B + \int \sqrt{A^{\frac{1}{a}} - \frac{A^2}{\rho^2}}\, d\rho.$$

6.133. $(p^2 - q^2)^a = yp - xq.$

После замены переменных

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \qquad 2\xi = x + y, \qquad 2\eta = x - y$$

уравнение переходит в уравнение 6.131

$$(\zeta_\xi \zeta_\eta)^a = \xi\zeta_\xi - \eta\zeta_\eta.$$

6.134. $(xp - yq)^a = pq$; см. 6.131.

6.135. $\left(\frac{p}{\cos^2 x}\right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y}\right)^b z^c = z^{\frac{ac}{a-b}}$; см. ч. I, п. 11.10.

6.136. $e^p = x(q + y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ay - \frac{y^2}{2} + x\ln(Ax) - x + B.$$

6.137. $\ln p + ay^2(p + q) - 2ayz - 2\ln y = b.$

Из характеристических уравнений получают первый интеграл p/y^2. Теперь можно действовать по методу ч. I, п. 9.3. Можно также применить преобразование $z = y^2 u(x, y)$; для u получится дифференциальное уравнение

$$u_y = \frac{b - \ln u_x}{ay^4} - u_x.$$

С помощью обоих методов получаем полный интеграл

$$z = Axy^2 - Ay^3 + \frac{\ln A - b}{3ay} + By^2.$$

6.138. $\ln(pq) + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax + By + \ln(AB), \qquad \text{если} \qquad AB > 0;$$

особый интеграл

$$z = -2 - \ln(xy), \qquad \text{если} \qquad xy > 0.$$

6.139 $p = \sin xq$; тип. ч. I, п. 11.4.

$$z = \frac{1}{A}\cos Ax - Ay + B.$$

ГЛАВА VII

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—7. Уравнения с одним или двумя квадратами производных

7.1. $p_1^2 + 2x_2x_3p_1 + 2x_1x_3p_2 + 2p_3 = 0.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$(p_1 + p_2)\exp\frac{x_3^2}{2} \quad \text{и} \quad (p_1 - p_2)\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right).$$

Если положить их равными $2A$, $2B$, то получаются уравнения

$$p_1 = A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right) + B\exp\frac{x_3^2}{2},$$
$$p_2 = A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right) - B\exp\frac{x_3^2}{2},$$

которые вместе с исходным уравнением образуют полную систему. Из этих трех уравнений можно определить также p_3 и получить, таким образом, полный интеграл

$$z = A(x_1 + x_2)e^{-X} + B(x_1 - x_2)e^{X} - ABx_3 - \\ - \frac{1}{2}\int (A^2e^{-2X} + B^2e^{2X})\,dx_3 + C, \quad \text{где} \quad 2X = x_3^2.$$

7.2. $ap_1^2 + bp_2^2 = x_3^2p_3$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ax_1 + Bx_2 - \frac{A^2a + B^2b}{x_3} + C.$$

7.3. $p_1^2 + p_2^2 = zp_3 + z^2$; тип ч. I, п. 13.2.

Подстановка

$$z = \zeta(\xi), \qquad \xi = Ax_1 + Bx_2 + 2Cx_3$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(A^2 + B^2)\zeta'^2 = 2C\zeta\zeta' + \zeta^2$$

с решением

$$\ln|\zeta| = \frac{\xi}{A^2+B^2}\left(C \pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}\right) + D.$$

7.4. $p_1^2 - p_2p_3 = z\left(p_2+p_3\right)$; тип ч. I, п. 13.4.

Полагая $\zeta = \ln|z|$, получаем уравнение ч. I, п. 13.1

$$\zeta_{x_1}^2 = \zeta_{x_2}\zeta_{x_3} + \zeta_{x_2} + \zeta_{x_3};$$

полный интеграл

$$\ln|z| = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \qquad \text{где} \qquad A^2 = BC + B + C.$$

7.5. $a\left(p_1-p_2\right)p_3 + bx_3\left(x_2p_1+x_1p_2\right) = c.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$2a\left(p_1-p_2\right) - bx_3^2, \quad p_1^2 - p_2^2, \quad \left(x_1+x_2\right)\left(p_1+p_2\right).$$

Уравнения, образованные из первых двух интегралов

$$2a\left(p_1-p_2\right) - bx_3^2 = A, \qquad p_1^2 - p_2^2 = B,$$

находятся в инволюции как с данным уравнением, так и друг с другом. Поэтому, если эти три уравнения разрешить относительно p_1, p_2, p_3 и затем проинтегрировать, то мы получим интегралы исходного уравнения

$$z = \frac{x_1-x_2}{4a}X + aB\frac{x_1+x_2}{X} + 2c\int\frac{dx_3}{X} + C, \text{ где } X = bx_3^2 + A.$$

7.6. $2p_1\left(x_3p_2+x_2p_3\right) + 2x_1 + x_2^2 = 0.$

С помощью преобразования Лежандра

$$x_\nu = Z_{X_\nu} = P_\nu, \qquad p_\nu = X_\nu$$

получают уравнение 7.1.

$$P_2^2 + 2X_1\left(X_3P_2 + X_2P_3\right) + 2P_1 = 0.$$

7.7. $x_1zp_1\left(x_3p_2+x_2p_3\right) = a\left(x_1p_1+2z\right).$

В уравнении можно разделить переменные. Если положить $z = u(x_1)\,v(x_2, x_3)$, то получается

$$\frac{a}{x_1}\,\frac{x_1u'+2u}{u^2u'} = A = v\left(x_3v_{x_2} + x_2v_{x_3}\right).$$

Первое равенство дает

$$u'\left(Au - \frac{a}{u}\right) = \frac{2a}{x_1},$$

следовательно,

$$\exp\frac{Au^2}{2a} = Bx_1^2 u.$$

Второе равенство приводит при $w = v^2$ к линейному дифференциальному уравнению

$$x_3 w_{x_2} + x_2 w_{x_3} = 2A$$

с интегралами

$$v^2 = 2A \ln|x_2 + x_3| + \Omega(x_2^2 - x_3^2).$$

8—14. Более двух квадратов производных с постоянными коэффициентами

7.8. $(p_1 + p_2)^2 = 2p_3 + z$; тип. ч. I, п. 13.2.

Подстановка

$$z = \zeta(\xi), \qquad \xi = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(A+B)^2 \zeta'^2 = 2C\zeta' + \zeta;$$

его решение

$$2u - 2C \ln|u + C| = \xi + D, \quad \text{где} \quad u^2 = (A+B)^2\zeta + C^2.$$

7.9. $ap_1^2 + bp_2^2 + cp_3^2 = 1$; тип ч. I, п. 13.1.

Полный интеграл

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad \text{где} \quad aA^2 + bB^2 + cC^2 = 1.$$

7.10. $ap_2p_3 + bp_3p_1 + cp_1p_2 = d$; тип ч. I, п. 13.1.

Полный интеграл

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad \text{где} \quad aBC + bCA + cAB = d.$$

7.11. $a_1p_1^2 + a_2p_2^2 + a_3p_3^2 = z$; тип ч. I, п. 13.4.

$$z = \frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{3} A_\nu x_\nu + A\right)^2}{4\sum\limits_{\nu=1}^{3} a_\nu A_\nu^2} \quad \text{или} \quad z = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{(x_\nu - A_\nu)^2}{4a_\nu}.$$

7.12. $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = \sum_{\nu=1}^{3} \int \sqrt{x_\nu^2 + A_\nu}\, dx_\nu + A_0, \quad \text{где} \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

7.13. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

Из характеристических уравнений легко получаются первые интегралы и с их помощью образуются находящиеся в инволюции уравнения

$$2(p_1-p_2)^2-(x_1-x_2)^2=A,$$
$$(p_1+p_2+p_3)^2-2(x_1+x_2+x_3)^2=B.$$

Из всех трех уравнений находят p_1, p_2, p_3 и затем определяют z.

7.14. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=2(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$.

Из характеристических уравнений получают, например, первые интегралы p_2/p_1, p_3/p_1. Если при этом положить:

$$Ap_2=Bp_1, \qquad Ap_3=Cp_1,$$

то получается полная система трех уравнений. Из этой системы находим:

$$p_1=\frac{2A(Ax_1+Bx_2+Cx_3)}{A^2+B^2+C^2},$$

следовательно,

$$z=\frac{(Ax_1+Bx_2+Cx_3)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Уравнение можно решить и другим способом. Например, данное уравнение имеет интеграл

$$\frac{x_1^2}{z+A}+\frac{x_2^2}{z+B}+\frac{x_3^2}{z+C}=1.$$

15—21. Остальные уравнения с квадратами производных

7.15. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=ax_1$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы p_2, $p_3+x_3p_2$. Если их положить соответственно равными A, B, то вместе с данным уравнением получаются три находящиеся в инволюции уравнения

$$p_2=A, \quad p_3=-Ax_3+B, \quad p_1=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}},$$

которые дают:

$$z=-\frac{A}{2}x_1\pm\frac{2}{3(a-AB)}\left((a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}+$$
$$+Ax_2-\frac{A}{2}x_3^2+Bx_3+C.$$

7.16. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=x_1z$; тип ч. I, п. 13.4.

Подстановка $z=\pm w^2$ приводит к уравнению 7.15

$$w_{x_1}(w_{x_1}+w_{x_2})+x_1w_{x_2}(x_3w_{x_2}+w_{x_3})=\pm\frac{x_1}{4}.$$

7.17. $p_1^2+x_2p_1p_2+x_1x_2p_2p_3+x_1x_2^2x_3p_2^2=x_1z$; тип ч. I, п. 13.4.

Подстановка $z=\pm u^2$ приводит к уравнению

$$q_1^2+x_2q_1q_2+x_1x_2q_2q_3+x_1x_2^2x_3q_2^2=\pm\frac{x_1}{4};$$

здесь

$$q_\nu=u_{x_\nu}.$$

В этом уравнении можно разделить переменные. Если положить

$$x_2q_2=A,\qquad q_3+Ax_3=B,$$

то получается еще соотношение

$$q_1^2+Aq_1+ABx_1=\pm\frac{x_1}{4}.$$

Из всех этих уравнений получаем:

$$u=-\frac{A}{2}x_1-\frac{v^3}{3(4AB\pm1)}+A\ln|x_2|+Bx_3-\frac{A}{2}x_3^2+C,$$

где

$$v^2=A^2-(4AB\pm1)x_1.$$

7.18. $a_1(x_2p_3-x_3p_2)^2+a_2(x_3p_1-x_1p_3)^2+a_3(x_1p_2-x_2p_1)^2=1.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$\sum x_\nu^2,\quad \sum x_\nu p_\nu,\quad \sum p_\nu^2.$$

7.19. $z^2p_1p_2+zp_2p_3+p_3p_1=1$; тип ч. I, п. 13.2.

$$\int\sqrt{ABz^2+BCz+AC}\,dz=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D.$$

7.20. $(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)^2=$

$$=\left[a^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)-1\right](p_1^2+p_2^2+p_3^2).$$

Замена переменных

$$z(x_1,\ x_2,\ x_3)=\zeta(\rho,\ \varphi,\ \psi),$$
$$x_1=\rho\sin\varphi\cos\psi,\qquad x_2=\rho\sin\varphi\sin\psi,\qquad x_3=\rho\cos\psi$$

приводит к уравнению

$$\zeta_\varphi^2+\frac{\zeta_\psi^2}{\sin^2\varphi}=(1-a^2)\frac{\rho^2(\rho^2+1)}{a^2\rho^2+a^2-1}\zeta_\rho^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Если положить левую и правую части равными A^2, то получаются уравнения

$$\zeta_\rho = \frac{A}{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\rho} \sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2+1}}, \tag{1}$$

$$\zeta_\psi^2 = (A^2 - \zeta_\varphi^2)\sin^2\varphi. \tag{2}$$

В последнем уравнении переменные разделены. Если положить левую и правую части равными B^2, то получаются еще два уравнения

$$\zeta_\psi = B, \tag{3}$$

$$\zeta_\varphi = \pm\sqrt{A^2 - \frac{B^2}{\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{A}{\sqrt{1-a^2}} I_1 + B\psi + I_2 + C,$$

где

$$I_1 = \int \frac{1}{\rho}\sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2+1}}\, d\rho = \frac{a}{2}\ln\frac{\sigma+a}{\sigma-a} - \sqrt{1-a^2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sigma}{\sqrt{1-a^2}},$$

причем

$$\sigma^2 = a^2 - \frac{1}{\rho^2+1},$$

а

$$I_2 = A\arcsin\frac{u}{\sqrt{A^2-B^2}} - B\,\mathrm{arctg}\frac{u}{B\cos\varphi},$$

причем

$$u^2 = A^2\sin^2\varphi - B^2.$$

7.21. $2ze^{x_3}(e^{-x_1}p_1 + e^{-x_2}p_2)^2 = p_3$; тип ч. I, п. 13.4.

Замена $w = z^2$, $q_\nu = w_{x_\nu}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$(e^{-x_1}q_1 + e^{-x_2}q_2)^2 = e^{-x_3}q_3.$$

Отсюда полный интеграл

$$z^2 = Ae^{x_1} + Be^{x_2} + (A+B)^2 e^{x_3} + C.$$

22—31. Уравнения с производными в более высоких степенях

7.22. $p_1p_2p_3 = x_1x_2x_3$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D, \quad \text{где} \quad 8ABC = 1.$$

7.23. $p_1p_2p_3 = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$.

Из характеристических уравнений находим первые интегралы p_2/p_1, p_3/p_1. Если положить

$$Ap_2 = Bp_1, \quad Ap_3 = Cp_1,$$

то получаем три уравнения, образующие полную систему. Отсюда находим:

$$p_1 = \sqrt{\frac{A}{BC}}\sqrt{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3}$$

и затем

$$z = \frac{2}{3\sqrt{ABC}}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^{\frac{3}{2}} + D.$$

7.24. $p_1p_2p_3 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + ABC.$$

Особый интеграл $z^2 = -4x_1x_2x_3$.

7.25. $p_1p_2p_3 = x_1p_1^2 + x_2p_2^2 + x_3p_3^2$.

Из характеристических уравнений легко получаются первые интегралы. Если с их помощью образовать уравнения

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = A, \quad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3} = B,$$

то получаются три уравнения, составляющие инволюционную систему, а из них можно определить p_1, p_2, p_3 и z. С помощью преобразования Лежандра $x_\nu = P_\nu$, $p_\nu = X_\nu$ уравнение переходит в линейное дифференциальное уравнение 3.61

$$X_1^2P_1 + X_2^2P_2 + X_3^2P_3 = X_1X_2X_3.$$

7.26. $p_1p_2p_3 - (x_2x_3p_2p_3 + x_3x_1p_3p_1 + x_1x_2p_1p_2) + $
$$+ x_1x_2x_3(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = 0.$$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $x_1p_1 - x_2p_2$, $x_1p_1 - x_3p_3$. Если при этом уравнения

$$x_2p_2 = x_1p_1 + A, \quad x_3p_3 = x_1p_1 + B$$

присоединить к данному, то образуется инволюционная система. Исключение приводит к кубическому уравнению для p_1.

7.27. $(a_1p_1 - z)(a_2p_2 - z)(a_3p_3 - z) = p_1p_2p_3$.

Для $\zeta(x_1, x_2, x_3) = \ln|z|$ из дифференциального уравнения получается уравнение типа ч. I, п. 13.1

$$(a_1\zeta_{x_1} - 1)(a_2\zeta_{x_2} - 1)(a_3\zeta_{x_3} - 1) = \zeta_{x_1}\zeta_{x_2}\zeta_{x_3}$$

с полным интегралом

$$\zeta = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_0,$$

где

$$(a_1A_1 - 1)(a_2A_2 - 1)(a_3A_3 - 1) = A_1A_2A_3.$$

7.28. $zp_1p_2p_3 = x_1x_2x_3$; тип ч. I, п. 13.4.

Пусть $z = u^\lambda$. Тогда

$$\lambda^3u^{4\lambda-3}u_{x_1}u_{x_2}u_{x_3} = x_1x_2x_3,$$

следовательно, для $\lambda = \frac{3}{4}$ получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{u_{x_1}}{x_1}\frac{u_{x_2}}{x_2}\frac{u_{x_3}}{x_3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Отсюда полный интеграл

$$\frac{3}{2}z^{\frac{4}{3}} = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D \quad \text{для} \quad ABC = 1.$$

7.29. $azp_1 + bz^2p_2^2 + cz^3p_3^3 = 1$.

Для $w = z^2$ получают уравнение типа ч. I, п. 13.1

$$\frac{a}{2}q_1 + \frac{b}{4}q_2^2 + \frac{c}{8}q_3^3 = 1$$

(при этом $q_\nu = w_{x_\nu}$). Поэтому полный интеграл данного уравнения имеет вид

$$z^2 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D,$$

где

$$\frac{a}{2}A + \frac{b}{4}B^2 + \frac{c}{3}C^3 = 1.$$

7.30. $p_1^2 + zp_2^2 + z^2p_3^2 = z^3p_1p_2p_3$; это уравнение типа ч. I, п. 13.2

$$ABC\int\frac{z^3}{A^2 + B^2z + C^2z^2}\,dz = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D.$$

7.31. $p_1^n + p_2^n + p_3^n = 1$; тип ч. I, п. 13.1.

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad \text{где} \quad A^n + B^n + C^n = 1.$$

ГЛАВА VIII

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БОЛЕЕ ЧЕМ ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

8.1. $p_1p_2 + p_3p_4 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = \sum A_\nu x_\nu + (A_1A_2 + A_3A_4).$$

Особый интеграл

$$z = -x_1x_2 - x_3x_4.$$

8.2. $p_1p_2p_3p_4 = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$; частный случай 8.13.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы p_ν/p_1 и из них — уравнения

$$A_1p_\nu = A_\nu p_1 \qquad (\nu = 2,\ 3,\ 4),$$

которые вместе с данным уравнением образуют полную систему. Четыре уравнения можно разрешить относительно p_ν, при этом получается

$$z = \frac{3}{4}\frac{(A_1x_1 + \ldots + A_4x_4)^{\frac{4}{3}}}{(A_1\ \ldots\ A_4)^{\frac{1}{3}}} + A_0.$$

8.3. $(p_1 - p_2)(p_3 + x_4)(p_4 + x_3) + x_2p_1 + x_1p_2 = 1.$

Переменные разделяются, после чего уравнения

$$(p_3 + x_4)(p_4 + x_3) = A, \qquad x_2p_1 + x_1p_2 + A(p_1 - p_2) = 1$$

можно решить с произвольной константой A. Для первого уравнения легко находится полный интеграл

$$z_1 = -x_3x_4 + Bx_3 + \frac{A}{B}x_4.$$

Второе уравнение линейно, его интегралами являются

$$z_2 = \ln|x_1 + x_2| + \Omega[(x_1 + x_2),\ (x_1 - x_2 - 2A)],$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами данного уравнения будут функции $z = z_1 + z_2$.

8.4. $p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$; частный случай 8.13. Процесс решения см. в 8.2

$$z = \frac{7}{8} \frac{(A_1 x_1 + \ldots + A_4 x_4)^{8/7}}{(A_1 \ldots A_4)^{1/7}} + A_0.$$

8.5. $(p_1 + x_4 p_3) p_4 + (p_2 + x_5 p_3) p_5 = 0.$

Так как x_1, x_2, x_3 не входят в уравнение, то можно произвести замену

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + u(x_4, x_5).$$

Тогда для u получается линейное однородное уравнение с главным интегралом

$$u = \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}.$$

В более общем виде интегралы данного уравнения — функции

$$z = \Omega\left(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}\right),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами являются также функции

$$z = Ax_1 + Bx_2 + (AD - BC) x_3 + \\ + (Cx_1 + Dx_2 + E)(Bx_4 - Ax_5) + F.$$

8.6. $p_1 [p_5 + x_5 (x_4 p_4 + x_5 p_5)] - p_2 [p_4 + x_4 (x_4 p_4 + x_5 p_5)] + \\ + p_3 (x_4 p_5 - x_5 p_4) = 0.$

Так как x_1, x_2, x_3 не входят в уравнение, то можно произвести замену

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + u(x_4, x_5).$$

Тогда для u получается линейное однородное уравнение с главным интегралом

$$u = \frac{(Ax_4 + Bx_5 - C)^2}{x_4^2 + x_5^2 + 1}.$$

В более общем виде интегралы данного уравнения — функции

$$z = \Omega\left(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \frac{(Ax_4 + Bx_5 - C)^2}{x_4^2 + x_5^2 + 1}\right),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами являются также функции

$$z = \Omega(x_1x_4 + x_2x_5 - x_3,\ x_4,\ x_5).$$

8.7. $\boldsymbol{p_1p_4 + (3x_2 + 2x_3)\,p_2p_4 + (4x_2 + 5x_3)\,p_3p_4 + {} + [x_4 + x_5(p_2 - p_3)]\,p_4p_5 + x_5p_5^2 = 0.}$

При делении на p_4 получается:

$$p_1 + (3x_2 + 2x_3)\,p_2 + (4x_2 + 5x_3)\,p_3 + {} + [x_4 + x_5(p_2 - p_3)]\,p_5 + x_5\frac{p_5^2}{p_4} = 0. \qquad (1)$$

Из характеристических уравнений следует:

$$x_1 + \ln|p_2 - p_3| = \text{const}, \qquad 7x_1 + \ln|p_2 + 2p_3| = \text{const},$$

т. е.

$$p_2 = 2Ae^{-x_1} + Be^{-7x_1}, \qquad p_3 = -Ae^{-x_1} + Be^{-7x_1}. \qquad (2)$$

Далее, из характеристических уравнений следует:

$$\ln\left|\frac{p_5}{p_4}\right| = 3Ae^{-x_1} + \text{const},$$

т. е.

$$p_5 = -Cp_4\exp(3Ae^{-x_1}),$$

и, таким образом, если еще раз обратиться к характеристическим уравнениям,

$$p_4 = D\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right),$$

$$p_5 = -CDe^{3Ae^{-x_1}}\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right). \qquad (3)$$

Так как уравнения (2) и (3) получены из первых интегралов уравнения (1), то они с (1) в инволюции. Кроме того, очевидно, что они в инволюции и друг с другом. Поэтому уравнения (1), (2), (3) имеют общие решения. Подставляя (2) и (3) в (1) и интегрируя, получаем $z = A(2x_2 - x_3)\,e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)\,e^{-7x_1} + D\left(x_4 - Cx_5e^{3Ae^{-x_1}}\right)\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right) + E.$

Можно поступить и так: из характеристических уравнений следует также

$$x_4p_4 + x_5p_5 = \text{const}, \qquad \frac{p_4}{p_5}e^{p_2 - p_3} = \text{const},$$

т. е. вместе с (2)

$$p_4 = \frac{C}{x_4 + Dx_5\exp 3Ae^{-x_1}}, \qquad p_5 = \frac{CD\exp 3Ae^{-x_1}}{x_4 + Dx_5\exp 3Ae^{-x_1}}.$$

Оба эти уравнения, вместе с уравнением (2) и данным, находятся в инволюции друг с другом. Из данного уравнения можно определить p_1 и получить наконец

$$z = A(2x_2 - x_3)e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)e^{-7x_1} +$$
$$+ C\ln|x_4 + Dx_5 \exp 3Ae^{-x_1}| - CD\int \exp 3Ae^{-x_1}dx_1 + E.$$

С помощью преобразования Лежандра уравнение переводится в линейное дифференциальное уравнение.

8.8. $(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + (p_1 - p_2)p_3[p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)x_6] = a$, $a \neq 0$.

Решая уравнения

$$p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)p_6 = A, \quad (1)$$

$$(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + A(p_1 - p_2)p_3 = a, \quad (2)$$

получают интегралы для произвольной константы A. Если $u(x_4, x_5, x_6)$ и $v(x_1, x_2, x_3)$ — интегралы этих двух уравнений, то $u + v$ — интеграл данного уравнения. Так как (1) не зависит от x_5, то решения получаются, если $p_5 = B$ считать константой. Тогда (1) — уравнение с разделяющимися переменными, и

$$u = \frac{2}{3C}[A + C(x_4 + B)]^{\frac{3}{2}} + Bx_5 - C\ln(x_6 + B).$$

Решения (2) получаются из 7.5.

8.9. $p_1p_2 \ldots p_n = x_1x_2 \ldots x_n$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$2z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu^2 + A_0, \quad \text{где} \quad A_1 \ldots A_n = 1,$$

или

$$(z - \zeta)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 - \xi_\nu) \text{ для любых } \zeta, \xi_\nu.$$

8.10. $p_1p_2 \ldots p_n = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$; это частный случай 8.13.

Из характеристических уравнений получаются первые интегралы p_ν/p_1. Если при этом положить $A_1p_\nu = A_\nu p_1$ ($\nu = 2, \ldots, n$), то получается полная система n уравнений, а из нее — полный интеграл

$$z = A_0 + \frac{n-1}{n}(A_1 \ldots A_n)^{\frac{1}{1-n}}(A_1x_1 + \ldots + A_nx_n)^{\frac{n}{n-1}}.$$

8.11. $p_1 p_2 \ldots p_n = (a_1 p_1 - z)(a_2 p_2 - z) \ldots (a_n p_n - z)$.

Для $\zeta(x_1, \ldots, x_n) = \ln|z|$ получается уравнение 13.1 из ч. I: $(a_1\zeta_{x_1} - 1) \ldots (a_n\zeta_{x_n} - 1) = \zeta_{x_1} \ldots \zeta_{x_n}$ с полным интегралом $\zeta = A_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$ для $(a_1 A_1 - 1) \ldots (a_n A_n - 1) = A_1 \ldots A_n$.

8.12. $z = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu + (n+1)(p_1 p_2 \ldots p_n)^{\frac{1}{n+1}}$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu + (n+1)(A_1 \ldots A_n)^{\frac{1}{n+1}}$; особый интеграл $z = \dfrac{(-1)^n}{x_1 \ldots x_n}$.

8.13. $f(p_1, \ldots, p_n) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$; f — однородная степени m функция.

Из первых интегралов $\dfrac{p_\nu}{p_1}$ $(\nu = 2, \ldots, n)$ получаются уравнения $p_\nu = \dfrac{A_\nu}{A_1} p_1$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, образующие вместе с данным уравнением полную систему. Из этой системы

$$p_\nu = A_\nu \left(\frac{\sum A_\nu x_\nu}{f(A_1, \ldots, A_n)}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \qquad \text{следовательно,}$$

$$z = \frac{m-1}{m}\left(\frac{\left(\sum A_\nu x_\nu\right)^m}{f(A_1, \ldots, A_n)}\right)^{\frac{1}{m-1}} + C.$$

8.14. $f(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu f_\nu(p_\nu)$.

Первые интегралы — функции $F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1)$, где $F_\nu(p) = \int \dfrac{dp}{f_\nu(p)}$. Система, состоящая из данного уравнения и уравнений $F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1) = A$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, разрешается относительно p_ν. Если $p_\nu = P_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ — решения, то

$$z = \int_{\xi_1, \ldots, \xi_n}^{x_1, \ldots, x_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \, dx_\nu \text{ — интеграл данного уравнения.}$$

ГЛАВА IX

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1. $F(p, q, z - xp - yq) = 0, \quad G(p, q, z - xp - yq) = 0.$

Если $F(a, b, c) = G(a, b, c) = 0$, то $z = ax + by + c$ — общее решение.

9.2. $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = f(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \ x_2 p_1 - x_1 p_2 = 0.$

Система инволюционная. Второе уравнение линейное, и решения его вполне очевидны. Затем из них выбираются такие, которые удовлетворяют также первому уравнению.

Интегральным базисом второго уравнения будет, очевидно, $x_1^2 + x_2^2$, x_3. Поэтому интегралами этого уравнения являются также все непрерывно дифференцируемые функции $\zeta(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\xi_2 = x_3$. Если эти функции удовлетворяют и первому уравнению, то должно быть $\zeta_{\xi_1}^2 + \zeta_{\xi_2}^2 = f(\xi_1^2 + \xi_2^2)$.

Об этом дифференциальном уравнении см. 6.64.

9.3. $p_1 p_2 = x_3 x_4, \ p_3 p_4 = x_1 x_2.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

Три уравнения образуют полную систему. Разрешая ее относительно p_1, p_2, p_3, получают:

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4}, \qquad p_2 = \frac{x_4 p_4}{x_2}, \qquad p_3 = \frac{x_1 x_2}{p_4};$$

или

$$p_1 = \frac{x_4 p_4}{x_1}, \qquad p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4}, \qquad p_3 = \frac{x_1 x_2}{p_4}.$$

Теперь каждая из обеих систем инволюционная. Вторая получается из первой подстановкой x_1 вместо x_2 (а также p_1 вместо p_2).

Преобразование А. Майера

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z(u, u_1, u_2, u_3, x_4),$$
$$x_1 = uu_1, \quad x_2 - \xi_2 = uu_2, \quad x_3 = uu_3$$

дает для первой системы

$$Z_u = \frac{2uu_1u_3(uu_2 + \xi_2)}{Z_{x_4}} + \frac{u_2}{uu_2 + \xi_2} x_4 Z_{x_4}.$$

(Так как u должно пробегать интервал $[0, 1]$, то теперь ясно, что введение условия $\xi_2 \neq 0$ было необходимо.) Так как u_1, u_2, u_3, ξ_2 — параметры, то это — дифференциальное уравнение 6.52. Поэтому здесь получается $Z = A(uu_2 + \xi_2)x_4 + \frac{u_3u_1u^2}{A} + B$, следовательно, $z = Ax_2x_4 + \frac{x_1x_3}{A} + B$. Подстановка x_1 вместо x_2 дает интегралы $z = Ax_1x_4 + \frac{x_2x_3}{A} + B$. Полными интегралами являются также

$$z = 2\sqrt{x_1x_3(x_2x_4 - A)} + B, \qquad 2\sqrt{x_2x_3(x_1x_4 - A)} + B.$$

Применение преобразования Якоби см. в ч. I, п. 14.7.

9.4. $p_1p_2p_3 = p_4, \; x_1p_1 = x_2p_2 + x_4p_3 + p_4x_3.$

Образование скобок дает уравнение $p_1p_2p_4 = p_3$. Если $p_1p_2 \equiv 0$, то отсюда следует, что все $p_\nu \equiv 0$; тогда получается интеграл $z = C$. Если $p_3 \equiv 0$ или $p_4 \equiv 0$, то соответственно $p_4 \equiv 0$ или $p_3 \equiv 0$. Тогда остается уравнение $x_1p_1 = x_2p_2$ с главным интегралом x_1x_2.

Пусть все $p_\nu \neq 0$. Тогда из трех уравнений следует:

$$p_1p_2 = \pm 1, \quad p_3 = \pm p_4, \quad x_1p_1 = x_2p_2 + (x_3 \pm x_4)p_4.$$

Это инволюционная система. Для последнего уравнения, в зависимости от выбора верхних или нижних знаков x_1x_2, $x_1(x_3 + x_4)$ или x_1x_2, $x_2(x_3 - x_4)$ — интегральный базис, и он удовлетворяет также второму уравнению. Остается так определить $\zeta(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = x_1x_2$ и $\xi_2 = x_1(x_3 + x_4)$ (соответственно $x_2(x_3 - x_4)$), чтобы ζ удовлетворяла и первому уравнению. Получается уравнение (ср. с 6.51) $(\xi_1\zeta_{\xi_1} + \xi_2\zeta_{\xi_2})\zeta_{\xi_1} = \pm 1$ с первым интегралом $\zeta_{\xi_2}/\zeta_{\xi_1}$. Из $\zeta_{\xi_2} = A\zeta_{\xi_1}$ и предыдущего уравнения получается $\zeta_{\xi_1} = [\pm(\xi_1 + A\xi_2)]^{-\frac{1}{2}}$; следовательно, $\zeta = 2\sqrt{\pm(\xi_1 + A\xi_2)} + B$ и

$$z = 2\sqrt{x_1x_2 + Ax_1(x_3 + x_4)} + B,$$
$$z = 2\sqrt{Ax_2(x_4 - x_3) - x_1x_2} + B.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ